LAPORAN

PENELITIAN KOMPETITIF DOSEN BERSAMA MAHASISWA

MENENTUKAN *SPECTRUM* SUATU GRAF BERBANTUAN MATLAB

KETUA TIM PENELITI

ABDUSSAKIR, M.Pd

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG

2009

PENGESAHAN LAPORAN
PENELITIAN KOMPETITIF DOSEN BERSAMA MAHASISWA

Judul Penelitian	: Menentukan *Spectrum* suatu Graf Berbantuan Matlab
Ketua Peneliti/NIP	: Abdussakir, M.Pd/19751006 200312 1 001
Anggota/NIP/NIM	:Wahyu H. Irawan, M.Pd/19710420 200003 1 003
	Evawati Alisah, M.Pd/10720604 199903 2 001
	Imam Fachruddin/06510004
	Novia Dwi Rahmawati/06510039
	Iqlillah Muzayyana D.F./06510061

	Malang, 29 Desember 2009
Mengetahui	
a.n. Dekan	
Pembantu Dekan Bidang Akademik	Ketua Peneliti,
ttd	ttd
Dr. H. Agus Mulyono, S.Pd, M.Kes	Abdussakir, M.Pd
NIP. 19750808 199903 1 003	NIP 19751006 200312 1 001

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT, sehingga dengan rahmat dan hidayah-Nya laporan penelitian dengan judul "**Menentukan *Spectrum* suatu Graf Berbantuan Matlab**" dapat diselesaikan. Sholawat dan salam semoga tetap tercurahkan kepada nabi Muhammad SAW yang telah membimbing manusia menuju jalan yang lurus, yaitu agama Islam.

Penelitian ini difokuskan pada pengkajian *spectrum* graf komplit (K_n), graf bintang (S_n), graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$), dan graf lintasan (P_n). Mengingat masih banyaknya jenis graf, maka penelitian mengenai spectrum masih dapat dilakukan.

Selama penyusunan laporan ini, peneliti telah dibantu oleh banyak pihak. Pada kesempatan ini, peneliti menyampaikan terima kasih kepada.

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. H. Sutiman B. Sumitro, SU. D.Sc selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang beserta seluruh Pembantu Dekan di Fakultas Sains dan Teknologi.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, beserta rekan-rekan dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

4. Staf Karyawan di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Peneliti mendoakan semoga bantuan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT. Semoga laporan penelitian ini dapat bermanfaat.

Malang, Desember 2009

Tim Peneliti

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Teori graf mempunyai banyak aplikasi praktis dalam berbagai disiplin, misalnya dalam biologi, ilmu komputer, ekonomi, teknik, informatika, linguistik, matematika, kesehatan, dan ilmu-ilmu sosial. Dalam berbagai hal, graf menjadi alat pemodelan yang sangat baik untuk menjelaskan dan menyelesaikan suatu permasalahan.

Graf G adalah pasangan ($V(G)$, $E(G)$) dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut *ukuran* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q. Graf dengan order p dan ukuran q dapat disebut graf-(p, q).

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut *terhubung langsung (adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut *terkait langsung (incident)*, dan titik u dan v disebut *ujung* dari e. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$. *Derajat dari titik* v di graf G, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$.

Misalkan G graf dengan order p ($p \geq 1$) dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. *Matriks keterhubungan titik* (atau *matriks keterhubungan*) dari graf G, dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks ($p \times p$) dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain, matriks keterhubungan dapat ditulis $A(G) = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{, jika } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Matriks keterhubungan suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya.

Matriks keterhubungan banyak digunakan untuk membahas karakteristik graf karena matriks keterhubungan merupakan matriks persegi. Bekerja dengan matriks persegi memberikan banyak kemudahan dibanding dengan matriks tidak persegi. Pembahasan matriks keterhubungan suatu graf dapat dikaitkan dengan konsep nilai eigen dan vektor eigen pada topik aljabar linier yang menghasilkan konsep *spectrum* suatu graf.

Penelitian mengenai *spectrum* suatu graf merupakan hal yang relatif baru dan banyak dilakukan. Oleh sebab itu, maka peneliti merasa perlu untuk meneliti spectrum suatu graf yang lebih ditekankan pada langkah-langkah menentukan spectrum dan análisis pembuktiannya dengan mengambil judul “Menentukan Spectrum suatu Graf Berbantuan Matlab”.

B. Rumusan Masalah

Masalah dalam penelitian ini dirumuskan sebagai berikut, yaitu bagaimana menentukan *spectrum* suatu graf berbantuan Matlab?

C. Batasan Masalah

Untuk lebih menfokuskan penelitian, maka graf yang dikaji dalam penelitian ini dibatasi pada graf komplit (K_n), graf bintang (S_n), graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$), dan graf lintasan (P_n).

D. Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah untuk menjelaskan proses atau langkah-langkah menentukan *spectrum* suatu graf berbantuan Matlab.

E. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut.

1. Memberikan informasi mengenai langkah-langkah menentukan *spectrum* suatu graf sehingga dapat acuan oleh peneliti lain untuk menentukan *spectrum* graf-graf lain yang belum dikaji dalam penelitian ini.
2. Memberikan informasi mengenai *spectrum* suatu graf sehingga dapat digunakan oleh peneliti lain untuk mengkaji lebih mendalam tentang karakteristik suatu graf atau untuk aplikasi pada masalah yang berkaitan.

BAB IV

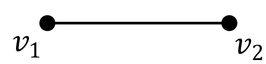
PEMBAHASAN

A. Spectrum Graf Komplit (K_n)

1. *Spectrum* dari Graf Komplit (K_2)

Untuk graf komplit K_2 dapat digambarkan grafnya seperti Gambar 4.1 berikut

K_2 :



Gambar 4.1 Graf Komplit K_2

Pada graf komplit K_2 menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A= \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Jadi didapatkan nilai eigen bagi A adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = -1$

Setelah mendapatkan nilai eigen maka selanjutnya akan dicari vektor eigen, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Disubstitusikan nilai eigen $\lambda = 1$ dan $\lambda = -1$ ke dalam persamaan di atas.

Untuk $\lambda = 1$ maka vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka didapatkan

$$-k + l = 0$$

$$k - l = 0$$

$$k = l$$

Misal $l = s$

diperoleh bahwa solusi umum bagi $(A - (1)I)X = 0$ adalah

$$s_1 = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 1.

Untuk $\lambda = -1$ maka vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka didapatkan

$k + l = 0$

$k = -l$ $\qquad v_3$

Misal $l = s$

diperoleh bahwa solusi umum bagi $(A - (-1)I)X = 0$ adalah

v_1

$$s_2 = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} \overset{v_2}{=} \begin{bmatrix} s \\ -s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 1.

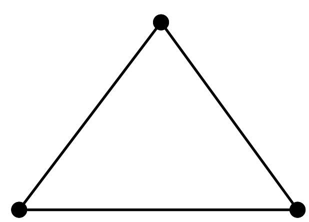
Jadi untuk $\lambda = 1$ terdapat satu basis ruang vektor eigen , dan untuk $\lambda = -1$ juga terdapat satu basis ruang vektor eigen , maka *spectrum* graf komplit K_2 adalah

$$\textbf{Spect}\ (\boldsymbol{K_2}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

2. *Spectrum* dari Graf Komplit ($\boldsymbol{K_3}$)

Untuk graf komplit K_3 yang dapat digambarkan grafnya seperti Gambar 4.2 berikut

K_3 :



Gambar 4.2 Graf Komplit K_3

Pada graf komplit K_3 menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= -\lambda^3 + 1 + 1 + \lambda + \lambda + \lambda$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda + 1)$$

Jadi didapatkan nilai eigen bagi K_3 adalah $\lambda = 2$ dan $\lambda = -1$

Setelah mendapatkan nilai eigen maka selanjutnya akan dicari vektor eigen, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Disubstitusikan nilai eigen $\lambda = 2$ dan $\lambda = -1$ ke dalam persamaan di atas. Pada graf komplit K_3 menghasilkan matriks adjacency 3×3 sehingga untuk menentukan vektor eigen maka matriks di atas akan direduksi menjadi bentuk eselon tereduksi baris

Untuk $= 2$, maka

$$[A-\lambda I|0]=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

i. $k-m=0$; sehingga $k=m$

ii. $l-m=0$; sehingga $l=m$

Dari (ii) maka (i) didapatkan

$$k=l=m$$

Misal $m=s$

diperoleh bahwa solusi umum bagi $(A-(2)I)X=0$ adalah

$$s_1=\begin{bmatrix}k\\ l\\ m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s\\ s\\ s\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 1.

Untuk $\lambda=-1$, dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE) maka didapatkan

$$[A-\lambda_2 I|0]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

$$k+l+m=0$$

$$k=-l-m$$

Misal $l=s$ dan $m=t$

diperoleh bahwa solusi umum bagi $(A-(-1)I)X=0$ adalah

$$s_2=\begin{bmatrix}k\\l\\m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-s-t\\s\\t\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 2.

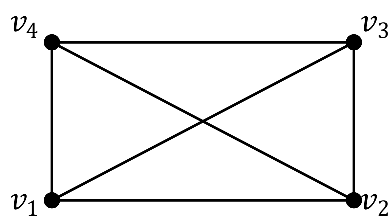
Jadi untuk $\lambda=2$ terdapat satu basis ruang vektor eigen , dan untuk $\lambda=-1$ terdapat dua basis ruang vektor eigen , jadi *spectrum* graf komplit K_3 adalah

$$\textbf{Spect}(\boldsymbol{K_3})=\begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{2}\end{bmatrix}$$

3. *Spectrum* dari Graf Komplit ($\boldsymbol{K_4}$)

Untuk graf komplit K_4 yang dapat digambarkan grafnya seperti Gambar 4.3 berikut

K_4 :



Gambar 4.3: Graf Komplit K_4

Pada graf komplit K_4 menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}v_1 & v_2 & v_3 & v_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1 & 1\\1 & 1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1 & 1\\1 & 1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$\det(A-\lambda I) = \lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3$

$= (\lambda-3)(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda+1)$

Jadi didapatkan nilai eigen bagi K_4 adalah $= 3$, dan $\lambda = -1$

Setelah mendapatkan nilai eigen maka akan dicari vektor eigennya, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Disubstitusikan nilai $\lambda = 3$ dan $\lambda = -1$ ke dalam persamaan di atas. Pada graf komplit K_4 menghasilkan matriks adjacency 4×4 sehingga untuk menentukan vektor eigen maka matriks di atas akan direduksi menjadi bentuk eselon tereduksi baris

Untuk $\lambda = 3$, maka

$$[A - \lambda\, I \,|\, 0] = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

i. $k - n = 0$; sehingga $k = n$

ii. $l - n = 0$; sehingga $l = n$

iii. $m - n = 0$; sehingga $m = n$

Dari (i), (ii), dan (iii) maka diperoleh

$k = l = m = n$

Misal $n = s$, maka diperoleh bahwa solusi umum bagi $(A - (3)I)X = 0$ adalah

$$s_1 = \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 1

Untuk $\lambda = -1$, dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE) maka didapatkan

$$[A - \lambda\, I \,|\, 0] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

$$k + l + m + n = 0$$

$$k = -l - m - n$$

Misal $l = s, m = t$ dan $n = u$, maka diperoleh bahwa solusi umum bagi $(A - (-1)I)X = 0$ adalah

$$s_1 = \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - t - u \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 3

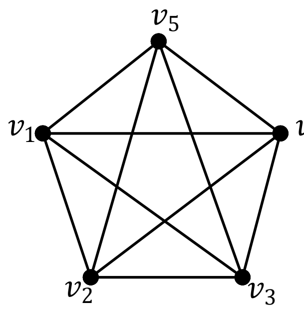
Jadi untuk $\lambda = 3$ terdapat satu basis ruang vektor eigen , dan untuk $\lambda = -1$ terdapat tiga basis ruang vektor eigen , jadi *spectrum* graf komplit K_4 adalah

$$\mathbf{Spect}(\boldsymbol{K_4}) = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

4. *Spectrum* dari Graf Komplit (K_5)

Untuk graf komplit K_5 yang dapat digambarkan grafnya seperti Gambar 4.4 berikut

K_5:



Gambar 4.4: Graf Komplit (K_5)

Pada graf komplit K_5 menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= -\lambda^5 + 10\lambda^3 + 20\lambda^2 + 15\lambda + 4 \\ &= (\lambda - 4)(\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Jadi didapatkan nilai eigen bagi K_5 adalah $= 4$, dan $\lambda = -1$

Setelah mendapatkan nilai eigen maka akan dicari vektor eigennya, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \\ n \\ o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dibstitusikan nilai $\lambda = 4$ dan $\lambda = -1$ ke dalam persamaan di atas. Pada graf komplit K_5 menghasilkan matriks adjacency 5×5 sehingga untuk menentukan vektor eigen maka matriks di atas akan direduksi menjadi bentuk eselon tereduksi baris

Untuk $\lambda = 4$, maka

$$[A - \lambda 1\, I \,|\, 0] = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

i. $k - o = 0$; sehingga $k = o$

ii. $l - o = 0$; sehingga $l = o$

iii. $m - o = 0$;sehingga $m = o$

iv. $n - o = 0$; sehingga $n = o$

Dari (i), (ii), (iii) dan (iv) maka diperoleh

$k = l = m = n = o$

Misal $o = s$, maka diperoleh bahwa solusi umum bagi $(A - (4)I)X = 0$ adalah

$$s_1 = \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \\ n \\ o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 1.

Untuk $\lambda = -1$, dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE) maka didapatkan

$$[A - \lambda_1 I|0] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

v_6 v_5

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan $v + w + x + y + z = 0$

$$v = -w - x - y - z$$

Misal $w = r, x = s$, $y = t$ dan $z = u$, maka diperoleh bahwa solusi umum bagi $(A - (-1)I)X = 0$ adalah

$$s_2 = \begin{bmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w - x - y - z \\ w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r - s - t - u \\ r \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 4.

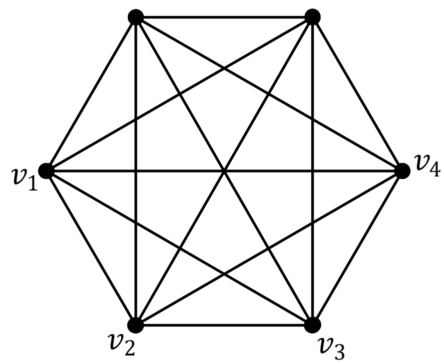
Jadi untuk $\lambda = 3$ terdapat satu basis ruang vektor eigen , dan untuk $\lambda = -1$ terdapat empat basis vektor eigen, jadi *spectrum* graf komplit K_5 adalah

$$\textbf{Spect}(\boldsymbol{K_5}) = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

5. *Spectrum* dari Graf Komplit (K_6)

Untuk graf komplit K_6 yang dapat digambarkan grafnya seperti Gambar 4.5 berikut

K_6 :



Gambar 4.5. Garf Komplit (K_6)

Pada graf komplit K_6 menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A= \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^6 - 15\lambda^4 - 40\lambda^3 - 45\lambda^2 - 24\lambda - 5$$

$$= (\lambda - 5)(\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda + 1)$$

Jadi didapatkan nilai eigen bagi K_6 adalah $= 5$, dan $\lambda = -1$

Setelah mendapatkan nilai eigen maka akan dicari vektor eigennya, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Disubstitusikan nilai $\lambda = 5$ dan $\lambda = -1$ ke dalam persamaan di atas. Pada graf komplit K_6 menghasilkan matriks adjacency 6×6 sehingga untuk menentukan vektor eigen maka matriks di atas akan direduksi menjadi bentuk eselon tereduksi baris

Untuk $\lambda = 5$, maka

$$[A - \lambda I|0] = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

i. $k - p = 0$; sehingga $k = p$

ii. $l - p = 0$; sehingga $l = p$

iii. $m - p = 0$; sehingga $m = p$

iv. $n - p = 0$; sehingga $n = p$

v. $o - p = 0$; sehingga $o = p$

Dari (i), (ii), (iii), (iv) dan (v) didapatkan

$k = l = m = n = o = p$

Misal $p = s$, maka diperoleh bahwa solusi umum bagi $(A - (5)I)X = 0$ adalah

$$s_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \\ s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 1.

Untuk $\lambda = -1$, dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE) maka didapatkan

$$[A - \lambda\, I \,|\, 0] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

$$k + l + m + n + o + p = 0$$

$$k = -l - m - n - o - p$$

Misal $l = r, m = s$, $n = t, o = u,$ dan $p = v$, maka diperoleh bahwa solusi umum bagi $(A - (-1)I)X = 0$ adalah

$$s_2 = \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \\ n \\ o \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l - m - n - o - p \\ l \\ m \\ n \\ o \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r - s - t - u - v \\ r \\ s \\ t \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

$$= r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 5.

Jadi untuk $\lambda = 5$ terdapat satu basis ruang vektor eigen , dan untuk $\lambda = -1$ terdapat lima basis ruang vektor eigen , jadi *spectrum* graf komplit K_5 adalah

$$\textbf{Spect}(\boldsymbol{K_6}) = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

Teorema:

Misal K_n graf komplit order n, maka *spectrum* graf komplit (K_n) adalah

$$\text{Spec }(K_n) = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 1 & (n-1) \end{bmatrix}$$

Bukti:

Misal K_n adalah graf komplit order n, maka

Matriks adjacency dari graf komplit (K_n)

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dari matriks adjacency di atas, maka akan dicari nilai eigennya dengan menentukan $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Melalui operasi baris elementer, matriks $\det(A - \lambda I)$ direduksi menjadi matriks segitiga atas diperoleh,

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & \frac{(-1)(-\lambda)(\lambda^2-1)}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & \ldots & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & \frac{(-1)(-\lambda)(\lambda^2-2)}{(\lambda^2-1)} & \frac{\lambda}{(\lambda^2-1)} & \frac{\lambda}{(\lambda^2-1)} & \ldots & \frac{\lambda}{(\lambda^2-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(-1)(-\lambda)(\lambda^2-3)}{(\lambda^2-2)} & \frac{\lambda}{(\lambda^2-2)} & \ldots & \frac{\lambda}{(\lambda^2-2)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{(-1)(-\lambda)(\lambda^2-4)}{(\lambda^2-3)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & 0 & \ddots & \frac{\lambda}{(\lambda^2-(n-2))} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{(-1)(-\lambda)(\lambda^2-n)}{(\lambda^2-(n-1))} \end{pmatrix}$$

$\det(A-\lambda I)$ tidak lain adalah hasil perkalian diagonal matrik segitiga atas tersebut. Jadi

$$\det(A-\lambda I) = \big(\lambda-(n-1)\big)(\lambda+1)^{n-1}$$

Karena, $\det(A) = 0$, maka

$$\big(\lambda-(n-1)\big)(\lambda+1)^{n-1} = 0$$

Sehingga didapatkan $\lambda = (n-1)$ atau $\lambda = -1$

Akan dibuktikan untuk $\lambda = (n-1)$ akan didapatkan banyaknya basis ruang vektor eigen adalah 1.

untuk $\lambda = (n-1)$ akan didapatkan

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} (n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & (n-1) & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & (n-1) & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1) \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan vektor eigen untuk $\lambda = (n-1)$

$(A-\lambda I)x = 0$

$$= \begin{bmatrix} (n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & (n-1) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & (n-1) & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian didapatkan

i. $x_1 = x_n$

ii. $x_2 = x_n$

iii. $\vdots = x_n$

iv. $x_{(n-1)} = x_n$

Sehingga dari i, ii,iii, dan iv diperoleh

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{(n-1)} = x_n$$

Misal $x_n = s$ maka vektor eigennya adalah

$$S_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ \vdots \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan banyaknya basis ruang vektor eigen untuk $\lambda = (n-1)$ adalah 1

Akan dibuktikan untuk $\lambda = -1$ akan didapatkan banyaknya basis ruang vektor eigen adalah $(n-1)$.

Untuk $\lambda = -1$ akan didapatkan

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = -1$ akan didapatkan

$(A - \lambda I)x = 0$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian didapatkan

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{(n-1)} + x_n = 0$$

$$x_1 = -x_2 - x_2 - \cdots - x_{(n-1)} - x_n$$

maka vektor eigennya adalah

$$S_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_2 - \cdots - x_{(n-1)} - x_n \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_{(n-1)} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_n \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

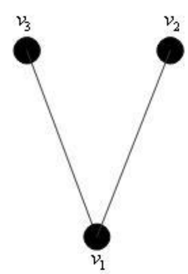
Jadi didapatkan banyaknya basis ruang vektor eigen untuk $\lambda = -1$ adalah $(n-1)$

Jadi terbukti bahwa Spec $(\boldsymbol{K_n}) = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{n-1}) & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{1} & (\boldsymbol{n-1}) \end{bmatrix}$

B. Spectrum Graf Star (S_n)

1. Spectrum S_2

S_2 :



Representasi matrik adjacent dari graf star dengan *n* = 2 adalah:

$$A(S_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan polynomial karakteristik diperoleh dengan:

$$(A(S_2) - \lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$det\left(A\left(S_2\right)-\lambda I\right)=\left|A\left(S_2\right)-\lambda I\right|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda} & \dfrac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & -\dfrac{\lambda\left(\lambda^2-2\right)}{\lambda^2-1} \end{vmatrix}=-\lambda\left(\lambda^2-2\right)$$

Nilai eigen diperoleh dengan:

$\left|A\left(S_2\right)-\lambda I\right|=-\lambda\left(\lambda^2-2\right)=0$

$-\lambda\left(\lambda-\sqrt{2}\right)\left(\lambda+\sqrt{2}\right)=0$

$\lambda_1=0$, $\lambda_2=\sqrt{2}$ atau $\lambda_3=-\sqrt{2}$

Basis dari representasi matrik adjacent dari graf star dengan n = 2 adalah:

Untuk $\lambda_1=0$, maka

$$\left(A\left(S_2\right)-\lambda_1 I\right)x=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$x_2+x_3=0 \rightarrow x_2=-x_3$ ...(1)

$x_1=0$ ...(2)

Misalkan $x_2=s$ dan $s\neq 0$, dengan mencari nilai dari x_3 pada persamaan (1) maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ s \\ -s \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$, basisnya adalah 1 dengan $\lambda_1=0$.

Untuk $\lambda_2=\sqrt{2}$, maka

$$\left(A\left(S_2\right)-\lambda_2 I\right)x=\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & 1 & 1\\ 1 & -\sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$-\sqrt{2}x_1+x_2+x_3=0 \qquad ...(1)$$

$$x_1-\sqrt{2}x_2=0\rightarrow x_1=\sqrt{2}x_2 \qquad ...(2)$$

$$x_1-\sqrt{2}x_3=0\rightarrow x_1=\sqrt{2}x_3 \qquad ...(3)$$

Misalkan $x_1=s$ dan $s\neq 0$, dengan mencari nilai dari x_2 dan x_3 pada persamaan (1), (2) dan (3) maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\ \frac{1}{2}\sqrt{2}s\\ \frac{1}{2}\sqrt{2}s\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}$$, basisnya adalah 1 dengan $\lambda_2=\sqrt{2}$.

Untuk $\lambda_3=-\sqrt{2}$, maka

$$\left(A\left(S_2\right)-\lambda_3 I\right)x=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1 & 1\\ 1 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$\sqrt{2}x_1+x_2+x_3=0$$

$$x_1+\sqrt{2}x_2=0\rightarrow x_1=-\sqrt{2}x_2$$

$$x_1+\sqrt{2}x_3=0\rightarrow x_1=-\sqrt{2}x_3$$

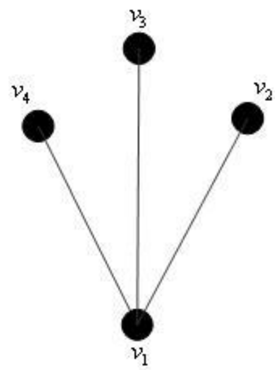
Misalkan $x_1=s$ dan $s\neq 0$, dengan mencari nilai dari x_2 dan x_3 pada persamaan diatas maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}s \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$, basisnya adalah 1 dengan $\lambda_3 = -\sqrt{2}$.

Jadi $Spec(S_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Spectrum S_3

S_3 :



Representasi matrik adjacent dari graf star dengan n = 3 adalah:

$$A(S_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan polynomial karakteristik diperoleh dengan:

$$\left(A(S_3) - \lambda I\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\left|A(S_3)-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1 & 1\\ 0 & -\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda} & \dfrac{1}{\lambda} & \dfrac{1}{\lambda}\\ 0 & 0 & -\dfrac{\lambda\left(\lambda^2-2\right)}{\lambda^2-1} & \dfrac{\lambda}{\lambda^2-1}\\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\lambda\left(\lambda^2-3\right)}{\lambda^2-2}\end{vmatrix}=-\lambda^2\left(\lambda^2-3\right)$$

Nilai eigen diperoleh dengan:

$$\left|A(S_3)-\lambda I\right|=-\lambda^2\left(\lambda^2-3\right)=0$$

$$-\lambda^2\left(\lambda-\sqrt{3}\right)\left(\lambda+\sqrt{3}\right)=0$$

$\lambda_1=0$, $\lambda_2=\sqrt{3}$ atau $\lambda_3=-\sqrt{3}$

Basis dari representasi matrik adjacent dari graf star dengan n = 3 adalah:

Untuk $\lambda_1=0$, maka

$$\left(A(S_3)-\lambda_1 I\right)x=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$x_2+x_3+x_4=0\rightarrow x_4=-x_2-x_3 \qquad ...(1)$$

$$x_1=0 \qquad ...(2)$$

Misalkan $x_2=s$, $x_3=t$ dan $s,t\neq 0$, dengan mencari nilai dari x_4 pada persamaan (1) maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ s\\ t\\ -s-t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$, basisnya adalah 2 dengan $\lambda_1=0$.

Untuk $\lambda_2 = \sqrt{3}$, maka

$$\left(A\left(S_3\right)-\lambda_2 I\right)x = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$-\sqrt{3}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{3}x_2$$

$$x_1 - \sqrt{3}x_3 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{3}x_3$$

$$x_1 - \sqrt{3}x_4 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{3}x_4$$

Misalkan $x_1 = s$ dan $s \neq 0$, dengan mencari nilai dari x_2 dan x_3 pada persamaan diatas maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ \frac{1}{3}\sqrt{3}s \\ \frac{1}{3}\sqrt{3}s \\ \frac{1}{3}\sqrt{3}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$, basisnya adalah 1 dengan $\lambda_2 = \sqrt{3}$.

Untuk $\lambda_3 = -\sqrt{3}$, maka

$$\left(A\left(S_3\right)-\lambda_3 I\right)x = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$\sqrt{3}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + \sqrt{3}x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -\sqrt{3}x_2$$

$$x_1 + \sqrt{3}x_3 = 0 \rightarrow x_1 = -\sqrt{3}x_3$$

$$x_1 + \sqrt{3}x_4 = 0 \rightarrow x_1 = -\sqrt{3}x_4$$

Misalkan $x_1 = s$ dan $s \neq 0$, dengan mencari nilai dari x_2 dan x_3 pada persamaan diatas, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

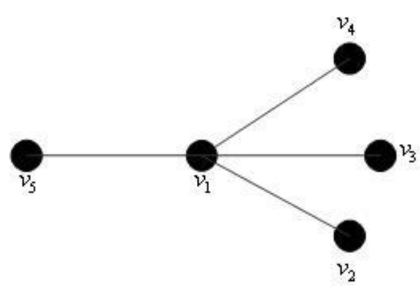
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3}s \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3}s \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

, basisnya adalah 1 dengan $\lambda_3 = -\sqrt{3}$.

Jadi $Spec(S_3) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3. Spectrum S_4

S_4 :



Representasi matrik adjacent dari graf star dengan *n* = 4 adalah:

$$A(S_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan polynomial karakteristik diperoleh dengan:

$$\left(A(S_4)-\lambda I\right)=\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\left|A(S_4)-\lambda I\right|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda\left(\lambda^2-2\right)}{\lambda^2-1} & \frac{\lambda}{\lambda^2-1} & \frac{\lambda}{\lambda^2-1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda\left(\lambda^2-3\right)}{\lambda^2-2} & \frac{\lambda}{\lambda^2-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda\left(\lambda^2-4\right)}{\lambda^2-3} \end{vmatrix}$$

$$=-\lambda^3\left(\lambda^2-4\right)$$

Nilai eigen diperoleh dengan:

$$\left|A(S_4)-\lambda I\right|=-\lambda^3\left(\lambda^2-4\right)=0$$

$$-\lambda^3\left(\lambda-\sqrt{4}\right)\left(\lambda+\sqrt{4}\right)=0$$

$\lambda_1=0$, $\lambda_2=\sqrt{4}$ atau $\lambda_3=-\sqrt{4}$

Basis dari representasi matrik adjacent dari graf star dengan n = 4 adalah:

Untuk $\lambda_1=0$, maka

$$\left(A(S_4)-\lambda_1 I\right)x=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$x_2+x_3+x_4+x_5=0 \rightarrow x_5=-x_2-x_3-x_4 \qquad ...(1)$$

$x_1 = 0$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad ...(2)$

Misalkan $x_2 = s$, $x_3 = t$, $x_4 = u$ dan $s,t,u \neq 0$, dengan mencari nilai dari x_5 pada persamaan (1) maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ t \\ u \\ -s-t-u \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

, basisnya adalah 3 dengan $\lambda_1 = 0$.

Untuk $\lambda_2 = \sqrt{4}$, maka

$$\left(A(S_4) - \lambda_2 I\right)x = \begin{pmatrix} -\sqrt{4} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{4} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{4} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\sqrt{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$-\sqrt{4}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 - \sqrt{4}x_2 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{4}x_2$$

$$x_1 - \sqrt{4}x_3 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{4}x_3$$

$$x_1 - \sqrt{4}x_4 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{4}x_4$$

$$x_1 - \sqrt{4}x_5 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{4}x_5$$

Misalkan $x_1 = s$ dan $s \neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ \frac{1}{4}\sqrt{4}s \\ \frac{1}{4}\sqrt{4}s \\ \frac{1}{4}\sqrt{4}s \\ \frac{1}{4}\sqrt{4}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4}\sqrt{4} \\ \frac{1}{4}\sqrt{4} \\ \frac{1}{4}\sqrt{4} \\ \frac{1}{4}\sqrt{4} \end{pmatrix}$$, basisnya adalah 1 dengan $\lambda_2 = \sqrt{4}$.

Untuk $\lambda_3 = -\sqrt{4}$, maka

$$\left(A(S_4) - \lambda_3 I\right)x = \begin{pmatrix} \sqrt{4} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{4} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{4} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$\sqrt{4}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 + \sqrt{4}x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -\sqrt{4}x_2$$

$$x_1 + \sqrt{4}x_3 = 0 \rightarrow x_1 = -\sqrt{4}x_3$$

$$x_1 + \sqrt{4}x_4 = 0 \rightarrow x_1 = -\sqrt{4}x_4$$

$$x_1 + \sqrt{4}x_5 = 0 \rightarrow x_1 = -\sqrt{4}x_5$$

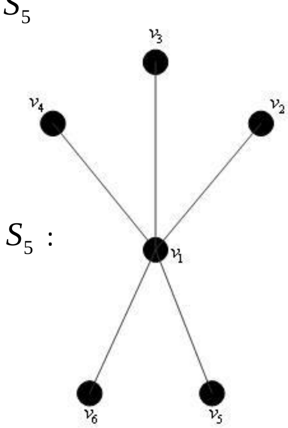
Misalkan $x_1 = s$ dan $s \neq 0$, maka vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -\frac{1}{4}\sqrt{4}s \\ -\frac{1}{4}\sqrt{4}s \\ -\frac{1}{4}\sqrt{4}s \\ -\frac{1}{4}\sqrt{4}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{4} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{4} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{4} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{4} \end{pmatrix}$$, basisnya adalah 1 dengan $\lambda_3 = -\sqrt{4}$.

Jadi $Spec(S_4) = \begin{pmatrix} \sqrt{4} & 0 & -\sqrt{4} \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

4. Spectrum S_5

S_5 :



Representasi matrik adjacent dari graf star dengan *n* = 5 adalah:

$$A(S_5)=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&1\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Persamaan polynomial karakteristik diperoleh dengan:

$$\left(A(S_5)-\lambda I\right)=\begin{pmatrix}-\lambda&1&1&1&1&1\\1&-\lambda&0&0&0&0\\1&0&-\lambda&0&0&0\\1&0&0&-\lambda&0&0\\1&0&0&0&-\lambda&0\\1&0&0&0&0&-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\left|A(S_5)-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1&1&1&1\\0&-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}&\frac{1}{\lambda}&\frac{1}{\lambda}&\frac{1}{\lambda}&\frac{1}{\lambda}\\0&0&-\frac{\lambda(\lambda^2-2)}{\lambda^2-1}&\frac{\lambda}{(\lambda^2-1)}&\frac{\lambda}{(\lambda^2-1)}&\frac{\lambda}{(\lambda^2-1)}\\0&0&0&-\frac{\lambda(\lambda^2-3)}{(\lambda^2-2)}&\frac{\lambda}{(\lambda^2-2)}&\frac{\lambda}{(\lambda^2-2)}\\0&0&0&0&-\frac{\lambda(\lambda^2-4)}{(\lambda^2-3)}&\frac{\lambda}{(\lambda^2-3)}\\0&0&0&0&0&-\frac{\lambda(\lambda^2-5)}{(\lambda^2-4)}\end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^4\left(\lambda^2 - 5\right)$$

Nilai eigen diperoleh dengan:

$$\left|A\left(S_5\right) - \lambda I\right| = -\lambda^4\left(\lambda^2 - 5\right) = 0$$

$$-\lambda^4\left(\lambda - \sqrt{5}\right)\left(\lambda + \sqrt{5}\right) = 0$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{5}$ atau $\lambda_3 = -\sqrt{5}$

Basis dari representasi matrik adjacent dari graf star dengan n = 5 adalah:

Untuk $\lambda_1 = 0$, maka

$$\left(A\left(S_5\right) - \lambda_1 I\right)x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \rightarrow x_6 = -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \qquad ...(1)$$

$$x_1 = 0 \qquad ...(2)$$

Misalkan $x_2 = s$, $x_3 = t$, $x_4 = u$, $x_4 = v$ dan $s, t, u, v \neq 0$, dengan mencari nilai dari x_6 pada persamaan (1) maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ t \\ u \\ v \\ -s-t-u-v \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

basisnya adalah 4 dengan $\lambda_1 = 0$.

Untuk $\lambda_2 = \sqrt{5}$, maka

$$\left(A\left(S_5\right)-\lambda_2 I\right)x = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{5} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$-\sqrt{5}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$

$x_1 - \sqrt{5}x_2 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{5}x_2$

$x_1 - \sqrt{5}x_3 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{5}x_3$

$x_1 - \sqrt{5}x_4 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{5}x_4$

$x_1 - \sqrt{5}x_5 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{5}x_5$

$x_1 - \sqrt{5}x_6 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{5}x_6$

Misalkan $x_1 = s$ dan $s \neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ \frac{1}{5}\sqrt{5}s \\ \frac{1}{5}\sqrt{5}s \\ \frac{1}{5}\sqrt{5}s \\ \frac{1}{5}\sqrt{5}s \\ \frac{1}{5}\sqrt{5}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}$$, basisnya adalah 1 dengan $\lambda_2 = \sqrt{5}$.

Untuk $\lambda_3 = -\sqrt{5}$, maka

$$\left(A(S_5) - \lambda_3 I\right)x = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$\sqrt{5}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

$$x_1 + \sqrt{5}x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -\sqrt{5}x_2$$

$$x_1 + \sqrt{5}x_3 = 0 \rightarrow x_1 = -\sqrt{5}x_3$$

$$x_1 + \sqrt{5}x_4 = 0 \rightarrow x_1 = -\sqrt{5}x_4$$

$$x_1 + \sqrt{5}x_5 = 0 \rightarrow x_1 = -\sqrt{5}x_5$$

$$x_1 + \sqrt{5}x_6 = 0 \rightarrow x_1 = -\sqrt{5}x_6$$

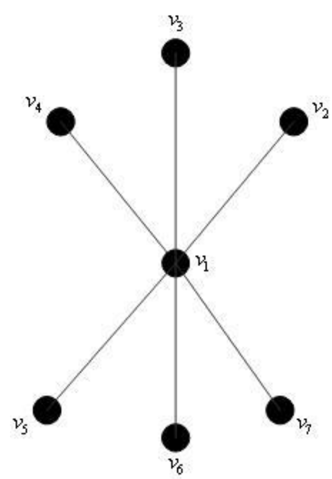
Misalkan $x_1 = s$ dan $s \neq 0$, dengan mencari nilai dari x_2 dan x_3 pada persamaan diatas maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5}s \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5}s \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5}s \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5}s \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}$$, basisnya adalah 1 dengan $\lambda_3 = -\sqrt{5}$.

Jadi $Spec(S_5) = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & -\sqrt{5} \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

5. Spectrum S_6

S_6 :



Representasi matrik adjacent dari graf star dengan n = 5 adalah:

$$A(S_6) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan polynomial karakteristik diperoleh dengan:

$$\left(A\left(S_6\right)-\lambda I\right)=\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\left|A\left(S_6\right)-\lambda I\right|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda\left(\lambda^2-2\right)}{\lambda^2-1} & \frac{\lambda}{\lambda^2-1} & \frac{\lambda}{\lambda^2-1} & \frac{\lambda}{\lambda^2-1} & \frac{\lambda}{\lambda^2-1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda\left(\lambda^2-3\right)}{\lambda^2-2} & \frac{\lambda}{\lambda^2-2} & \frac{\lambda}{\lambda^2-2} & \frac{\lambda}{\lambda^2-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda\left(\lambda^2-4\right)}{\lambda^2-3} & \frac{\lambda}{\lambda^2-3} & \frac{\lambda}{\lambda^2-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda\left(\lambda^2-5\right)}{\lambda^2-4} & \frac{\lambda}{\lambda^2-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda\left(\lambda^2-6\right)}{\lambda^2-5} \end{vmatrix}$$

$$=-\lambda^5\left(\lambda^2-6\right)$$

Nilai eigen diperoleh dengan:

$$\left|A\left(S_6\right)-\lambda I\right|=-\lambda^5\left(\lambda^2-6\right)=0$$

$$-\lambda^5\left(\lambda-\sqrt{6}\right)\left(\lambda+\sqrt{6}\right)=0$$

$\lambda_1=0$, $\lambda_2=\sqrt{6}$ atau $\lambda_3=-\sqrt{6}$

Basis dari representasi matrik adjacent dari graf star dengan n = 6 adalah:

Untuk $\lambda_1=0$, maka

$$\left(A(S_6)-\lambda_1 I\right)x=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&1&1\\1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\end{pmatrix}=0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=0\rightarrow x_7=-x_2-x_3-x_4-x_5-x_6 \qquad ...(1)$$

$$x_1=0 \qquad ...(2)$$

Misalkan $x_2=s$, $x_3=t$, $x_4=u$, $x_5=v$, $x_6=w$ dan $s,t,u,v,w\neq 0$, dengan mencari nilai dari x_6 pada persamaan (1) maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\s\\t\\u\\v\\w\\-s-t-u-v-w\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

basisnya adalah 5 dengan $\lambda_1=0$.

Untuk $\lambda_2=\sqrt{6}$, maka

$$\left(A(S_6)-\lambda_2 I\right)x=\begin{pmatrix}-\sqrt{6}&1&1&1&1&1&1\\1&-\sqrt{6}&0&0&0&0&0\\1&0&-\sqrt{6}&0&0&0&0\\1&0&0&-\sqrt{6}&0&0&0\\1&0&0&0&-\sqrt{6}&0&0\\1&0&0&0&0&-\sqrt{6}&0\\1&0&0&0&0&0&-\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\end{pmatrix}=0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$-\sqrt{6}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=0$$

$$x_1-\sqrt{6}x_2=0\rightarrow x_1=\sqrt{6}x_2$$

$x_1 - \sqrt{6}x_3 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{6}x_3$

$x_1 - \sqrt{6}x_4 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{6}x_4$

$x_1 - \sqrt{6}x_5 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{6}x_5$

$x_1 - \sqrt{6}x_6 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{6}x_6$

$x_1 - \sqrt{6}x_7 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{6}x_7$

Misalkan $x_1 = s$ dan $s \neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ \frac{1}{6}\sqrt{6}s \\ \frac{1}{6}\sqrt{6}s \\ \frac{1}{6}\sqrt{6}s \\ \frac{1}{6}\sqrt{6}s \\ \frac{1}{6}\sqrt{6}s \\ \frac{1}{6}\sqrt{6}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \end{pmatrix}$$, basisnya adalah 1 dengan $\lambda_2 = \sqrt{6}$.

Untuk $\lambda_3 = -\sqrt{6}$, maka

$$\left(A(S_6) - \lambda_3 I\right)x = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$\sqrt{6}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0$

$x_1+\sqrt{6}x_2=0\rightarrow x_1=-\sqrt{6}x_2$

$x_1+\sqrt{6}x_3=0\rightarrow x_1=-\sqrt{6}x_3$

$x_1+\sqrt{6}x_4=0\rightarrow x_1=-\sqrt{6}x_4$

$x_1+\sqrt{6}x_5=0\rightarrow x_1=-\sqrt{6}x_5$

$x_1+\sqrt{6}x_6=0\rightarrow x_1=-\sqrt{6}x_6$

$x_1+\sqrt{6}x_7=0\rightarrow x_1=-\sqrt{6}x_7$

Misalkan $x_1=s$ dan $s\neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s\\ -\frac{1}{6}\sqrt{6}s\\ -\frac{1}{6}\sqrt{6}s\\ -\frac{1}{6}\sqrt{6}s\\ -\frac{1}{6}\sqrt{6}s\\ -\frac{1}{6}\sqrt{6}s\\ -\frac{1}{6}\sqrt{6}s \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 1\\ -\frac{1}{6}\sqrt{6}\\ -\frac{1}{6}\sqrt{6}\\ -\frac{1}{6}\sqrt{6}\\ -\frac{1}{6}\sqrt{6}\\ -\frac{1}{6}\sqrt{6}\\ -\frac{1}{6}\sqrt{6} \end{pmatrix}$, basisnya adalah 1 dengan $\lambda_3=-\sqrt{6}$.

Jadi $Spec(S_6)=\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & -\sqrt{6}\\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Teorema

Misal S_n adalah graf star dengan $n\in N-\{1\}$, maka spectrum S_n adalah

$$Spec(S_n)=\begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0^{n-1} & -\sqrt{n}\\ 1 & n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bukti

Misalkan $A(S_n)$ adalah matrik adjacent dari graf star (S_n), maka

$$A(S_n)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Pertama akan ditentukan persamaan karakteristik dari $A(S_n)$, yaitu

$$\det\left(A(S_n)-\lambda I\right)=\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ldots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & -\lambda \end{pmatrix}\right|$$

Melalui operasi baris matrik $(A(S_n)-\lambda I)$ direduksi menjadi matrik segitiga atas diperoleh:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & \frac{(-1)(-\lambda)(\lambda^2-1)}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & \ldots & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & \frac{(-1)(-\lambda)(\lambda^2-2)}{(\lambda^2-1)} & \frac{\lambda}{(\lambda^2-1)} & \frac{\lambda}{(\lambda^2-1)} & \ldots & \frac{\lambda}{(\lambda^2-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(-1)(-\lambda)(\lambda^2-3)}{(\lambda^2-2)} & \frac{\lambda}{(\lambda^2-2)} & \ldots & \frac{\lambda}{(\lambda^2-2)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{(-1)(-\lambda)(\lambda^2-4)}{(\lambda^2-3)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & 0 & \ddots & \frac{\lambda}{(\lambda^2-(n-2))} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{(-1)(-\lambda)(\lambda^2-n)}{(\lambda^2-(n-1))} \end{pmatrix}$$

$\det\left(A(S_n)-\lambda I\right)$ tidak lain adalah hasil perkalian diagonal matrik segitiga atas tersebut. Jadi persamaan polinomial karakteristiknya adalah :

$$\det\left(A(S_n)-\lambda I\right)=\frac{(-\lambda)}{\lambda^2}(-1)^n(\lambda)^n\left(\lambda^2-n\right)$$

$$=\frac{(-\lambda)}{\lambda^2}(-1)^n(\lambda)^n\left(\lambda^2-n\right)$$

$$=\frac{(-\lambda)}{\lambda^2}(-1)^n(\lambda)^n\left(\lambda^2-n\right)$$

$$=(-1)^{n+1}(\lambda)^{n-1}\left(\lambda^2-n\right)$$

Nilai eigenya adalah:

$$\det\left(A(S_n)-\lambda I\right)=(-1)^{n+1}(\lambda)^{n-1}\left(\lambda^2-n\right)=0$$

$(-1)^{n+1}(\lambda)^{n-1}=0$ atau $\left(\lambda^2-n\right)=0$

Kemudian diperoleh nilai eigen $\lambda_1=0^{n-1}$ atau $\lambda_{2,3}=\pm\sqrt{n}$.

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuain dengan λ_1.

Untuk $\lambda_1=0^{n-1}$, kita subsitusikan λ_1 ke dalam matrik $\left(A(S_n)-\lambda_1 I\right)$ diperoleh:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Didapatkan sistem persamaan linier:

$x_2+\cdots+x_n=0 \qquad ...(1)$

$x_1=0 \qquad ...(2)$

Misalkan $x_2=s_2,...,x_{n-1}=s_{n-1}$ dan $s_2,...,s_{n-1}\neq 0$, dengan mencari nilai dari x_n pada persamaan (1) maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ \vdots \\ -s_2 - s_3 - s_4 - s_5 - \ldots - s_n \end{pmatrix} = s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \ldots + s_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jadi basis pada matrik diatas adalah $m(\lambda_1) = n - 1$.

Untuk $\lambda_2 = \sqrt{n}$, vektor eigennya diperoleh dengan mensubsitusikan λ_2 ke dalam matrik $(A(S_n) - \lambda_2 I)$, sehingga diperoleh:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{n} & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \sqrt{n} & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \sqrt{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Didapatkan sistem persamaan linier:

$$\sqrt{n}x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 0$$
$$x_1 = \sqrt{n}x_2$$
$$x_1 = \sqrt{n}x_3$$
$$\vdots$$
$$x_1 = \sqrt{n}x_n$$

Misalkan $x_1 = s$ dan $s \neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ \frac{\sqrt{n}}{n}s \\ \frac{\sqrt{n}}{n}s \\ \vdots \\ \frac{\sqrt{n}}{n}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{n}}{n} \\ \frac{\sqrt{n}}{n} \\ \vdots \\ \frac{\sqrt{n}}{n} \end{pmatrix}$$

Jadi basis pada matrik diatas adalah $m(\lambda_2) = n-1$.

Untuk $\lambda_3 = -\sqrt{n}$, vektor eigennya:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{n} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\sqrt{n} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\sqrt{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Didapatkan sistem persamaan linier:

$$\begin{aligned} &-\sqrt{n}x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 0 \\ &x_1 = -\sqrt{n}x_2 \\ &x_1 = -\sqrt{n}x_3 \\ &\vdots \\ &x_1 = -\sqrt{n}x_n \end{aligned}$$

Misalkan $x_1 = s$ dan $s \neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -\frac{\sqrt{n}}{n}s \\ -\frac{\sqrt{n}}{n}s \\ \vdots \\ -\frac{\sqrt{n}}{n}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{n}}{n} \\ -\frac{\sqrt{n}}{n} \\ \vdots \\ -\frac{\sqrt{n}}{n} \end{pmatrix}$$

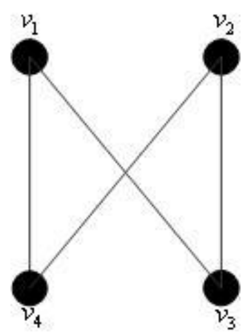
Jadi basis pada matrik diatas adalah $m(\lambda_3) = n-1$.

Jadi, terbukti bahwa $Spec(S_n) = \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0^{n-1} & -\sqrt{n} \\ 1 & n-1 & 1 \end{pmatrix}$

C. Spectrum Graf Komplit Bipartisi $(K_{m,n})$

1. Spectrum $K_{2,2}$

$K_{2,2}$:



Representasi matrik adjacent $K_{2,2}$ adalah:

$$A(K_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan polynomial karakteristik diperoleh dengan:

$$\left(A\left(K_{2,2}\right)-\lambda I\right)=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&0&1&1\\0&-\lambda&1&1\\1&1&-\lambda&0\\1&1&0&-\lambda\end{pmatrix}$$

$$det\left(K_{2,2}-\lambda I\right)=\left|K_{2,2}-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&1&1\\0&-\lambda&1&1\\0&0&-\dfrac{\lambda^2-2}{\lambda}&\dfrac{2}{\lambda}\\0&0&0&-\dfrac{\lambda\left(\lambda^2-4\right)}{\lambda^2-2}\end{vmatrix}=\lambda^2\left(\lambda^2-4\right)$$

Nilai eigen diperoleh dengan:

$$\left|K_{2,2}-\lambda I\right|=\lambda^2\left(\lambda^2-4\right)=0$$

$$\lambda^2\left(\lambda-\sqrt{4}\right)\left(\lambda+\sqrt{4}\right)=0$$

$\lambda_1=0$, $\lambda_2=\sqrt{4}$ atau $\lambda_3=-\sqrt{4}$

Basis dari representasi matrik adjacent dari $K_{2,2}$ adalah:

Untuk $\lambda_1=0$, maka

$$\left(K_{2,2}-\lambda_1 I\right)x=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$x_3+x_4=0\rightarrow x_3=-x_4 \qquad ...(1)$$

$$x_1+x_2=0\rightarrow x_1=-x_2 \qquad ...(2)$$

Misalkan $x_2=s$, $x_4=t$ dan $s,t\neq 0$, dengan mencari nilai dari x_1 dan x_3 pada persamaan (1) dan (2), maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ s \\ -t \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

basisnya adalah 2 dengan $\lambda_1 = 0$.

Untuk $\lambda_2 = \sqrt{4}$, maka

$$\left(K_{2,2} - \lambda_2 I\right)x = \begin{pmatrix} -\sqrt{4} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{4} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\sqrt{4} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\sqrt{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$-\sqrt{4}x_1 + x_3 + x_4 = 0 \rightarrow x_3 + x_4 = \sqrt{4}x_1$$

$$-\sqrt{4}x_2 + x_3 + x_4 = 0 \rightarrow x_3 + x_4 = \sqrt{4}x_2$$

$$x_1 + x_2 - \sqrt{4}x_3 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = \sqrt{4}x_3$$

$$x_1 + x_2 - \sqrt{4}x_4 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = \sqrt{4}x_4$$

Persamaan diatas dapat juga ditulis:

$$x_3 = x_4 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{4}} \text{ dan } x_1 = x_2 = \frac{x_3 + x_4}{\sqrt{4}}$$

Misalkan $x_1 = x_2 = s$ dan $s \neq 0$, dengan mencari nilai dari x_3 dan x_4 pada persamaan diatas, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ \frac{2}{\sqrt{4}}s \\ \frac{2}{\sqrt{4}}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{2}{\sqrt{4}} \\ \frac{2}{\sqrt{4}} \end{pmatrix}$$, basisnya adalah 1 dengan $\lambda_2 = \sqrt{4}$.

Untuk $\lambda_3 = -\sqrt{4}$, maka

$$(K_{2,2} - \lambda_3 I)x = \begin{pmatrix} \sqrt{4} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{4} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \sqrt{4} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \sqrt{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$\sqrt{4}x_1 + x_3 + x_4 = 0 \rightarrow x_3 + x_4 = -\sqrt{4}x_1$$

$$\sqrt{4}x_2 + x_3 + x_4 = 0 \rightarrow x_3 + x_4 = -\sqrt{4}x_2$$

$$x_1 + x_2 + \sqrt{4}x_3 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = -\sqrt{4}x_3$$

$$x_1 + x_2 - \sqrt{4}x_4 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = -\sqrt{4}x_4$$

Persamaan diatas dapat juga ditulis:

$$x_3 = x_4 = \frac{x_1 + x_2}{-\sqrt{4}} \text{ dan } x_1 = x_2 = \frac{x_3 + x_4}{-\sqrt{4}}$$

Misalkan $x_1 = x_2 = s$ dan $s \neq 0$, dengan mencari nilai dari x_3 dan x_4, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

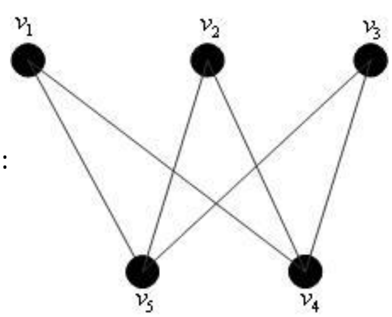
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ \dfrac{2}{-\sqrt{4}}s \\ \dfrac{2}{-\sqrt{4}}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dfrac{2}{-\sqrt{4}} \\ \dfrac{2}{-\sqrt{4}} \end{pmatrix}$$

basisnya adalah 1 dengan $\lambda_3 = -\sqrt{4}$.

Jadi $Spec\left(K_{2,2}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{4} & 0 & -\sqrt{4} \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. Spectrum $K_{2,3}$

$K_{2,3}$:



Representasi matrik adjacent $K_{2,3}$ adalah:

$$A\left(K_{2,3}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan polynomial karakteristik diperoleh dengan:

$$\left(A\left(K_{2,3}\right)-\lambda I\right)=\begin{pmatrix}0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&0&1&1&1\\0&-\lambda&1&1&1\\1&1&-\lambda&0&0\\1&1&0&-\lambda&0\\1&1&0&0&-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\left|K_{2,3}-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&1&1&1\\0&-\lambda&1&1&1\\0&0&-\frac{\lambda^2-2}{\lambda}&\frac{2}{\lambda}&\frac{2}{\lambda}\\0&0&0&-\frac{\lambda\left(\lambda^2-4\right)}{\lambda^2-2}&\frac{2\lambda}{\lambda^2-2}\\0&0&0&0&-\frac{\lambda\left(\lambda^2-6\right)}{\lambda^2-4}\end{vmatrix}=-\lambda^3\left(\lambda^2-6\right)$$

Nilai eigen diperoleh dengan:

$$\left|K_{2,3}-\lambda I\right|=-\lambda^3\left(\lambda^2-6\right)=0$$

$$-\lambda^3\left(\lambda-\sqrt{6}\right)\left(\lambda+\sqrt{6}\right)=0$$

$\lambda_1=0$, $\lambda_2=\sqrt{6}$ atau $\lambda_3=-\sqrt{6}$

Basis dari representasi matrik adjacent dari $K_{2,3}$ adalah:

Untuk $\lambda_1=0$, maka

$$\left(K_{2,3}-\lambda_1 I\right)x=\begin{pmatrix}0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$x_3+x_4+x_5=0\rightarrow x_3=-x_4-x_5 \qquad ...(1)$$

$x_1 + x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -x_2 \qquad ...(2)$

Misalkan $x_2 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = u$ dan $s,t,u \neq 0$, dengan mencari nilai dari x_1 dan x_3 pada persamaan (1) dan (2), maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ s \\ -t-u \\ t \\ u \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

basisnya adalah 3 dengan $\lambda_1 = 0$.

Untuk $\lambda_2 = \sqrt{6}$, maka

$$\left(K_{2,3} - \lambda_2 I\right)x = \begin{pmatrix} -\sqrt{6} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\sqrt{6} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$-\sqrt{6}x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \rightarrow x_3 + x_4 + x_5 = \sqrt{6}x_1$$

$$-\sqrt{6}x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \rightarrow x_3 + x_4 + x_5 = \sqrt{6}x_2$$

$$x_1 + x_2 - \sqrt{6}x_3 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = \sqrt{6}x_3$$

$$x_1 + x_2 - \sqrt{6}x_4 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = \sqrt{6}x_4$$

$$x_1 + x_2 - \sqrt{6}x_5 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = \sqrt{6}x_5$$

Persamaan diatas dapat juga ditulis:

$$x_3 = x_4 = x_5 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{6}} \text{ dan } x_1 = x_2 = \frac{x_3 + x_4 + x_5}{\sqrt{6}}$$

Misalkan $x_1 = x_2 = s$ dan $s \neq 0$, dengan mencari nilai dari x_3, x_4 dan x_5, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ \frac{2}{\sqrt{6}}s \\ \frac{2}{\sqrt{6}}s \\ \frac{2}{\sqrt{6}}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

basisnya adalah 1 dengan $\lambda_2 = \sqrt{6}$.

Untuk $\lambda_3 = -\sqrt{6}$, maka

$$\left(K_{2,3} - \lambda_3 I\right)x = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{6} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$\sqrt{6}x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \rightarrow x_3 + x_4 + x_5 = -\sqrt{6}x_1$$

$$\sqrt{6}x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \rightarrow x_3 + x_4 + x_5 = -\sqrt{6}x_2$$

$$x_1 + x_2 + \sqrt{6}x_3 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = -\sqrt{6}x_3$$

$$x_1 + x_2 + \sqrt{6}x_4 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = -\sqrt{6}x_4$$

$$x_1 + x_2 + \sqrt{6}x_5 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = -\sqrt{6}x_5$$

Persamaan diatas dapat juga ditulis:

$$x_3 = x_4 = x_5 = \frac{x_1 + x_2}{-\sqrt{6}} \text{ dan } x_1 = x_2 = \frac{x_3 + x_4 + x_5}{-\sqrt{6}}$$

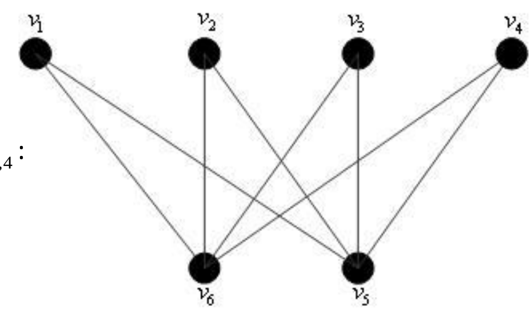
Misalkan $x_1 = x_2 = s$ dan $s \neq 0$, dengan mencari nilai dari x_3, x_4 dan x_5, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ -\frac{2}{\sqrt{6}}s \\ -\frac{2}{\sqrt{6}}s \\ -\frac{2}{\sqrt{6}}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$ basisnya adalah 1 dengan $\lambda_3 = -\sqrt{6}$.

Jadi $Spec\left(K_{2,3}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

3. Spectrum $K_{2,4}$

$K_{2,4}$:



Representasi matrik adjacent $K_{2,4}$ adalah:

$$A\left(K_{2,4}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan polynomial karakteristik diperoleh dengan:

$$\left(A\left(K_{2,4}\right)-\lambda I\right)=\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\left|K_{2,4}-\lambda I\right|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\lambda^2-2}{\lambda} & \dfrac{2}{\lambda} & \dfrac{2}{\lambda} & \dfrac{2}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\lambda\left(\lambda^2-4\right)}{\lambda^2-2} & \dfrac{2\lambda}{\lambda^2-2} & \dfrac{2\lambda}{\lambda^2-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\lambda\left(\lambda^2-6\right)}{\lambda^2-4} & \dfrac{2\lambda}{\lambda^2-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\lambda\left(\lambda^2-8\right)}{\lambda^2-6} \end{vmatrix}=\lambda^4\left(\lambda^2-8\right)$$

Nilai eigen diperoleh dengan:

$$\left|K_{2,4}-\lambda I\right|=\lambda^4\left(\lambda^2-8\right)=0$$

$$-\lambda^4\left(\lambda-\sqrt{8}\right)\left(\lambda+\sqrt{8}\right)=0$$

$\lambda_1=0$, $\lambda_2=\sqrt{8}$ atau $\lambda_3=-\sqrt{8}$

Basis dari representasi matrik adjacent dari $K_{2,4}$ adalah:

Untuk $\lambda_1=0$, maka

$$\left(K_{2,4}-\lambda_1 I\right)x=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}=0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \rightarrow x_3 = -x_4 - x_5 - x_6 \qquad ...(1)$$

$$x_1 + x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -x_2 \qquad ...(2)$$

Misalkan $x_2 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = u$, $x_6 = v$ dan $s,t,u,v \neq 0$, dengan mencari nilai dari x_1 dan x_3 pada persamaan (1) dan (2), maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ s \\ -t-u-v \\ t \\ u \\ v \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

basisnya adalah 4 dengan $\lambda_1 = 0$.

Untuk $\lambda_2 = \sqrt{8}$, maka

$$\left(K_{2,4} - \lambda_2 I\right)x = \begin{pmatrix} -\sqrt{8} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{8} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\sqrt{8} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\sqrt{8} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{8} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$-\sqrt{8}x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \rightarrow x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = \sqrt{8}x_1$$

$$-\sqrt{8}x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \rightarrow x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = \sqrt{8}x_2$$

$$x_1 + x_2 - \sqrt{8}x_3 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = \sqrt{8}x_3$$

$$x_1 + x_2 - \sqrt{8}x_4 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = \sqrt{8}x_4$$

$$x_1 + x_2 - \sqrt{8}x_5 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = \sqrt{8}x_5$$

$$x_1 + x_2 - \sqrt{8}x_6 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = \sqrt{8}x_6$$

Persamaan diatas dapat juga ditulis:

$$x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{8}} \text{ dan } x_1 = x_2 = \frac{x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{\sqrt{8}}$$

Misalkan $x_1 = x_2 = s$ dan $s \neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ \frac{2}{\sqrt{8}}s \\ \frac{2}{\sqrt{8}}s \\ \frac{2}{\sqrt{8}}s \\ \frac{2}{\sqrt{8}}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{2}{\sqrt{8}} \\ \frac{2}{\sqrt{8}} \\ \frac{2}{\sqrt{8}} \\ \frac{2}{\sqrt{8}} \end{pmatrix}$$ basisnya adalah 1 dengan $\lambda_2 = \sqrt{8}$.

Untuk $\lambda_3 = -\sqrt{8}$, maka

$$\left(K_{2,4} - \lambda_2 I\right)x = \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{8} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \sqrt{8} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \sqrt{8} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{8} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$\sqrt{8}x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \rightarrow x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = -\sqrt{8}x_1$$

$$\sqrt{8}x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \rightarrow x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = -\sqrt{8}x_2$$

$$x_1 + x_2 + \sqrt{8}x_3 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = -\sqrt{8}x_3$$

$$x_1 + x_2 + \sqrt{8}x_4 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = -\sqrt{8}x_4$$

$$x_1 + x_2 + \sqrt{8}x_5 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = -\sqrt{8}x_5$$

$$x_1 + x_2 + \sqrt{8}x_6 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = -\sqrt{8}x_6$$

Persamaan diatas dapat juga ditulis:

$$x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = \frac{x_1 + x_2}{-\sqrt{8}} \text{ dan } x_1 = x_2 = \frac{x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{-\sqrt{8}}$$

Misalkan $x_1 = x_2 = s$ dan $s \neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

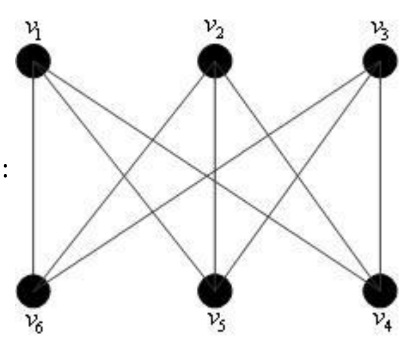
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ -\frac{2}{\sqrt{8}}s \\ -\frac{2}{\sqrt{8}}s \\ -\frac{2}{\sqrt{8}}s \\ -\frac{2}{\sqrt{8}}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{8}} \\ -\frac{2}{\sqrt{8}} \\ -\frac{2}{\sqrt{8}} \\ -\frac{2}{\sqrt{8}} \end{pmatrix}$$

basisnya adalah 1 dengan $\lambda_3 = -\sqrt{8}$.

Jadi $Spec(K_{2,4}) = \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 & -\sqrt{8} \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

4. Spectrum $K_{3,3}$

$K_{3,3}$:



Representasi matrik adjacent $K_{3,3}$ adalah:

$$A\left(K_{3,3}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan polynomial karakteristik diperoleh dengan:

$$\left(A\left(K_{3,3}\right)-\lambda I\right)=\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\left|K_{3,3}-\lambda I\right|=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\left(\lambda^2-3\right)}{\lambda} & \dfrac{3}{\lambda} & \dfrac{3}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\lambda\left(\lambda^2-6\right)}{\lambda^2-3} & \dfrac{3\lambda}{\lambda^2-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\lambda\left(\lambda^2-9\right)}{\lambda^2-6} \end{vmatrix}=\lambda^4\left(\lambda^2-9\right)$$

Nilai eigen diperoleh dengan:

$$\left|K_{3,3}-\lambda I\right|=\lambda^4\left(\lambda^2-9\right)=0$$

$$\lambda^4\left(\lambda-\sqrt{9}\right)\left(\lambda+\sqrt{9}\right)=0$$

$\lambda_1=0$, $\lambda_2=\sqrt{9}$ atau $\lambda_3=-\sqrt{9}$

Basis dari representasi matrik adjacent dari $K_{3,3}$ adalah:

Untuk $\lambda_1=0$, maka

$$\left(K_{3,3}-\lambda_1 I\right)x=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{pmatrix}=0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$x_4+x_5+x_6=0\to x_4=-x_5-x_6 \qquad ...(1)$$

$$x_1+x_2+x_3=0\to x_1=-x_2-x_3 \qquad ...(2)$$

Misalkan $x_2=s$, $x_3=t$, $x_5=u$, $x_6=v$ dan $s,t,u,v\neq 0$, dengan mencari nilai dari x_1 dan x_4 pada persamaan (1) dan (2), maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-s-t\\s\\t\\-u-v\\u\\v\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

basisnya adalah 4 dengan $\lambda_1=0$.

Untuk $\lambda_2=\sqrt{9}$, maka

$$\left(K_{3,3}-\lambda_2 I\right)x=\begin{pmatrix}-\sqrt{9}&0&0&1&1&1\\0&-\sqrt{9}&0&1&1&1\\0&0&-\sqrt{9}&1&1&1\\1&1&1&-\sqrt{9}&0&0\\1&1&1&0&-\sqrt{9}&0\\1&1&1&0&0&-\sqrt{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{pmatrix}=0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$-\sqrt{9}x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \rightarrow x_4 + x_5 + x_6 = \sqrt{9}x_1$$

$$-\sqrt{9}x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \rightarrow x_4 + x_5 + x_6 = \sqrt{9}x_2$$

$$-\sqrt{9}x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \rightarrow x_4 + x_5 + x_6 = \sqrt{9}x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - \sqrt{9}x_4 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = \sqrt{9}x_4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - \sqrt{9}x_5 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = \sqrt{9}x_5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - \sqrt{9}x_6 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = \sqrt{9}x_6$$

Persamaan diatas dapat juga ditulis:

$$x_4 = x_5 = x_6 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{9}} \text{ dan } x_1 = x_2 = x_3 = \frac{x_4 + x_5 + x_6}{\sqrt{9}}$$

Misalkan $x_1 = x_2 = x_3 = s$ dan $s \neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ s \\ \frac{3}{\sqrt{9}}s \\ \frac{3}{\sqrt{9}}s \\ \frac{3}{\sqrt{9}}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{3}{\sqrt{9}} \\ \frac{3}{\sqrt{9}} \\ \frac{3}{\sqrt{9}} \end{pmatrix}$$

basisnya adalah 1 dengan $\lambda_2 = \sqrt{9}$.

Untuk $\lambda_3 = -\sqrt{9}$, maka

$$\left(K_{3,3}-\lambda_3 I\right)x=\begin{pmatrix}\sqrt{9} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \sqrt{9} & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & \sqrt{9} & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & \sqrt{9} & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & \sqrt{9} & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{pmatrix}=0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$\sqrt{9}x_1+x_4+x_5+x_6=0\rightarrow x_4+x_5+x_6=-\sqrt{9}x_1$$

$$\sqrt{9}x_2+x_4+x_5+x_6=0\rightarrow x_4+x_5+x_6=-\sqrt{9}x_2$$

$$\sqrt{9}x_3+x_4+x_5+x_6=0\rightarrow x_4+x_5+x_6=-\sqrt{9}x_3$$

$$x_1+x_2+x_3+\sqrt{9}x_4=0\rightarrow x_1+x_2+x_3=-\sqrt{9}x_4$$

$$x_1+x_2+x_3+\sqrt{9}x_5=0\rightarrow x_1+x_2+x_3=-\sqrt{9}x_5$$

$$x_1+x_2+x_3+\sqrt{9}x_6=0\rightarrow x_1+x_2+x_3=-\sqrt{9}x_6$$

Persamaan diatas dapat juga ditulis:

$$x_4=x_5=x_6=\frac{x_1+x_2+x_3}{-\sqrt{9}}\ \text{ dan }\ x_1=x_2=x_3=\frac{x_4+x_5+x_6}{-\sqrt{9}}$$

Misalkan $x_1=x_2=x_3=s$ dan $s\neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

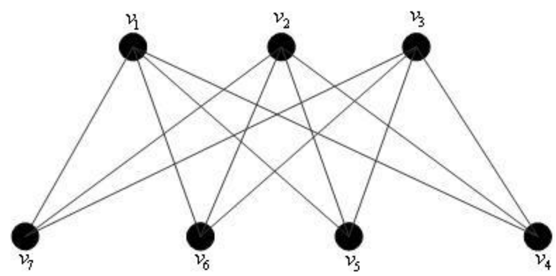
$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\ s\\ s\\ -\frac{3}{\sqrt{9}}s\\ -\frac{3}{\sqrt{9}}s\\ -\frac{3}{\sqrt{9}}s\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ -\frac{3}{\sqrt{9}}\\ -\frac{3}{\sqrt{9}}\\ -\frac{3}{\sqrt{9}}\end{pmatrix}$$

basisnya adalah 1 dengan $\lambda_3 = -\sqrt{9}$.

Jadi $Spec(K_{3,3}) = \begin{pmatrix} \sqrt{9} & 0 & -\sqrt{9} \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

5. Spectrum $K_{3,4}$

$K_{3,4}$:



Representasi matrik adjacent $K_{3,3}$ adalah:

$$A(K_{3,4}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan polynomial karakteristik diperoleh dengan:

$$\left(A(K_{3,4}) - \lambda I\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\left|K_{3,4} - \lambda I\right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-3}{\lambda} & \frac{3}{\lambda} & \frac{3}{\lambda} & \frac{3}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda\left(\lambda^2-6\right)}{\lambda^2-3} & \frac{3\lambda}{\lambda^2-3} & \frac{3\lambda}{\lambda^2-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda\left(\lambda^2-9\right)}{\lambda^2-6} & \frac{3\lambda}{\lambda^2-6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda\left(\lambda^2-12\right)}{\lambda^2-9} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^5\left(\lambda^2 - 12\right)$$

Nilai eigen diperoleh dengan:

$$\left|K_{3,4} - \lambda I\right| = \lambda^5\left(\lambda^2 - 12\right) = 0$$

$$\lambda^5\left(\lambda - \sqrt{12}\right)\left(\lambda + \sqrt{12}\right) = 0$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{12}$ atau $\lambda_3 = -\sqrt{12}$

Basis dari representasi matrik adjacent dari $K_{3,4}$ adalah:

Untuk $\lambda_1 = 0$, maka

$$\left(K_{3,4}-\lambda_1 I\right)x=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&1&1\\1&1&1&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\end{pmatrix}=0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$x_4+x_5+x_6+x_7=0\rightarrow x_4=-x_5-x_6-x_7 \qquad ...(1)$$

$$x_1+x_2+x_3=0\rightarrow x_1=-x_2-x_3 \qquad ...(2)$$

Misalkan $x_2=s$, $x_3=t$, $x_5=u$, $x_6=v$, $x_7=w$ dan $s,t,u,v,w\neq 0$, dengan mencari nilai dari x_1 dan x_4 pada persamaan (1) dan (2), maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-s-t\\s\\t\\-u-v-w\\u\\v\\w\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

basisnya adalah 5 dengan $\lambda_1=0$.

Untuk $\lambda_2=\sqrt{12}$, maka

$$\left(K_{3,4}-\lambda_2 I\right)x=\begin{pmatrix} -\sqrt{12} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{12} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\sqrt{12} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\sqrt{12} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -\sqrt{12} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{12} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}=0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$-\sqrt{12}x_1+x_4+x_5+x_6+x_7=0\rightarrow x_4+x_5+x_6+x_7=\sqrt{12}x_1$$

$$-\sqrt{12}x_2+x_4+x_5+x_6+x_7=0\rightarrow x_4+x_5+x_6+x_7=\sqrt{12}x_2$$

$$-\sqrt{12}x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=0\rightarrow x_4+x_5+x_6+x_7=\sqrt{12}x_3$$

$$x_1+x_2+x_3-\sqrt{12}x_4=0\rightarrow x_1+x_2+x_3=\sqrt{12}x_4$$

$$x_1+x_2+x_3-\sqrt{12}x_5=0\rightarrow x_1+x_2+x_3=\sqrt{12}x_5$$

$$x_1+x_2+x_3-\sqrt{12}x_6=0\rightarrow x_1+x_2+x_3=\sqrt{12}x_6$$

$$x_1+x_2+x_3-\sqrt{12}x_7=0\rightarrow x_1+x_2+x_3=\sqrt{12}x_7$$

Persamaan diatas dapat juga ditulis:

$$x_4=x_5=x_6=x_7=\frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{12}}\ \text{dan}\ x_1=x_2=x_3=\frac{x_4+x_5+x_6+x_7}{\sqrt{12}}$$

Misalkan $x_1=x_2=x_3=s$ dan $s\neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ s \\ \frac{3}{\sqrt{12}}s \\ \frac{3}{\sqrt{12}}s \\ \frac{3}{\sqrt{12}}s \\ \frac{3}{\sqrt{12}}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{3}{\sqrt{12}} \\ \frac{3}{\sqrt{12}} \\ \frac{3}{\sqrt{12}} \\ \frac{3}{\sqrt{12}} \end{pmatrix},$$ basisnya adalah 1 dengan $\lambda_2 = \sqrt{12}$.

Untuk $\lambda_3 = -\sqrt{12}$, maka

$$\left(K_{3,4} - \lambda_3 I\right)x = \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{12} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{12} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \sqrt{12} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{12} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$\sqrt{12}x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0 \to x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = -\sqrt{12}x_1$$

$$\sqrt{12}x_2 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0 \to x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = -\sqrt{12}x_2$$

$$\sqrt{12}x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0 \to x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = -\sqrt{12}x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt{12}x_4 = 0 \to x_1 + x_2 + x_3 = -\sqrt{12}x_4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt{12}x_5 = 0 \to x_1 + x_2 + x_3 = -\sqrt{12}x_5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt{12}x_6 = 0 \to x_1 + x_2 + x_3 = -\sqrt{12}x_6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt{12}x_7 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -\sqrt{12}x_7$$

Persamaan diatas dapat juga ditulis:

$$x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{-\sqrt{12}} \text{ dan } x_1 = x_2 = x_3 = \frac{x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{-\sqrt{12}}$$

Misalkan $x_1 = x_2 = x_3 = s$ dan $s \neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ s \\ -\frac{3}{\sqrt{12}}s \\ -\frac{3}{\sqrt{12}}s \\ -\frac{3}{\sqrt{12}}s \\ -\frac{3}{\sqrt{12}}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -\frac{3}{\sqrt{12}} \\ -\frac{3}{\sqrt{12}} \\ -\frac{3}{\sqrt{12}} \\ -\frac{3}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}$$

basisnya adalah 1 dengan $\lambda_3 = -\sqrt{12}$.

Jadi $Spec\left(K_{3,4}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 & -\sqrt{12} \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Teorema

Misal $K_{m,n}$ adalah graf komplit bipartisi dengan $m, n \in N - \{1\}$, maka spectrum $K_{m,n}$ adalah

$$Spec\left(K_{m,n}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{mn} & 0^{m+n-2} & -\sqrt{mn} \\ 1 & m+n-2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bukti

Misalkan $A\left(K_{m,n}\right)$ adalah matrik adjacent dari $K_{m,n}$, maka

$$A\left(K_{m,n}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Pertama akan ditentukan persamaan karakteristik dari $A\left(K_{m,n}\right)$, yaitu

$$\det\left(A\left(K_{m,n}\right)-\lambda I\right)=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}$$

Melalui operasi baris matrik $\left(A\left(K_{m,n}\right)-\lambda I\right)$ direduksi menjadi matrik segitiga atas diperoleh:

$$\begin{pmatrix}
-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
0 & \ddots & -\lambda & \ddots & \vdots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
\vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{(-1)(\lambda)\left(\lambda^2-m\right)}{\lambda^2} & \frac{m\lambda}{\lambda^2} & \frac{m\lambda}{\lambda^2} & \dots & \frac{m\lambda}{\lambda^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{(-1)(\lambda)\left(\lambda^2-2m\right)}{\left(\lambda^2-m\right)} & \frac{m\lambda}{\left(\lambda^2-m\right)} & \dots & \frac{m\lambda}{\left(\lambda^2-m\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \frac{(-1)(\lambda)\left(\lambda^2-3m\right)}{\left(\lambda^2-2m\right)} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & \ddots & \frac{m\lambda}{\left(\lambda^2-m(n-2)\right)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{(-1)(\lambda)\left(\lambda^2-mn\right)}{\left(\lambda^2-m(n-1)\right)}
\end{pmatrix}$$

$\det\left(A\left(K_{m,n}\right)-\lambda I\right)$ tidak lain adalah hasil perkalian diagonal matrik segitiga atas tersebut. Jadi persaman polinomial karakteristiknya adalah :

$$\det\left(A\left(K_{m,n}\right)-\lambda I\right)=\frac{(-1)^m(\lambda)^m}{\lambda^2}(-1)^n(\lambda)^n\left(\lambda^2-mn\right)$$

$$=\frac{(-1)^m(\lambda)^m(-1)^n(\lambda)^n}{\lambda^2}\left(\lambda^2-mn\right)$$

$$=\frac{(-1)^{m+n}(\lambda)^{m+n}}{\lambda^2}\left(\lambda^2-mn\right)\ =(-1)^{m+n}(\lambda)^{m+n-2}\left(\lambda^2-mn\right)$$

Nilai eigenya adalah:

$$\det\left(A\left(K_{m,n}\right)-\lambda I\right)==(-1)^{m+n}(\lambda)^{m+n-2}\left(\lambda^2-mn\right)=0$$

$(-1)^{m+n}(\lambda)^{m+n-2}=0$ atau $\left(\lambda^2-mn\right)=0$

Kemudian diperoleh nilai eigen $\lambda_1=0^{m+n-2}$ atau $\lambda_{2,3}=\pm\sqrt{mn}$.

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuain dengan λ_1.

Untuk $\lambda_1 = 0^{m+n-2}$, kita subsitusikan λ_1 ke dalam matrik $\left(A\left(K_{m,n}\right) - \lambda_1 I\right)$ diperoleh:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Didapatkan sistem persamaan linier:

$y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + y_n = 0$

$x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1} + x_m = 0$

Persamaan diatas dapat juga ditulis:

$y_1 = -y_2 - \cdots - y_{n-1} - y_n$ dan $x_1 = -x_2 - \cdots - x_{n-1} - x_n$

maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{m-1} \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - \ldots - x_m \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \\ -y_2 - \cdots - y_{n-1} - y_n \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + x_m \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + y_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jadi basis pada matrik diatas adalah $m\left(\lambda_1\right) = m - 1 + n - 1 = m + n - 2$.

Untuk $\lambda_2 = \sqrt{mn}$, vektor eigennya diperoleh dengan mensubsitusikan λ_2 ke dalam matrik $\left(A\left(K_{m,n}\right) - \lambda_2 I\right)$, sehingga diperoleh:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{mn} & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -\sqrt{mn} & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\sqrt{mn} & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -\sqrt{mn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & -\sqrt{mn} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{mn} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\sqrt{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Didapatkan sistem persamaan linier yang pertama:

$$-\sqrt{mn}x_1 + y_1 + ... + y_n = 0$$
$$-\sqrt{mn}x_2 + y_1 + ... + y_n = 0$$
$$\vdots$$
$$-\sqrt{mn}x_m + y_1 + ... + y_n = 0$$

Dapat ditulis dengan

$$x_1 = x_2 = x_{m-1} = x_m = \frac{-y_1 - y_2 - ... - y_{n-1} - y_n}{\sqrt{mn}}$$

Persamaan linier yang kedua:

$$x_1 + x_2 + ... + x_{m-1} + x_m + \sqrt{mn}y_1 = 0$$
$$x_1 + x_2 + ... + x_{m-1} + x_m + \sqrt{mn}y_2 = 0$$
$$\vdots$$
$$x_1 + x_2 + ... + x_{m-1} + x_m + \sqrt{mn}y_n = 0$$

Dapat ditulis dengan

$$y_1 = y_2 = y_{n-1} = y_n = \frac{-x_1 - x_2 - \ldots - x_{m-1} - x_m}{\sqrt{mn}}$$

maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1} - y_n}{\sqrt{mn}} \\ \frac{-y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1} - y_n}{\sqrt{mn}} \\ \vdots \\ \frac{-y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1} - y_n}{\sqrt{mn}} \\ \frac{-y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1} - y_n}{\sqrt{mn}} \\ \frac{-x_1 - x_2 - \ldots - x_{m-1} - x_m}{\sqrt{mn}} \\ \vdots \\ \frac{-x_1 - x_2 - \ldots - x_{m-1} - x_m}{\sqrt{mn}} \\ \frac{-x_1 - x_2 - \ldots - x_{m-1} - x_m}{\sqrt{mn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ \vdots \\ s \\ s \\ -\frac{ms}{\sqrt{mn}} \\ \vdots \\ -\frac{ms}{\sqrt{mn}} \\ -\frac{ms}{\sqrt{mn}} \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ -\frac{m}{\sqrt{mn}} \\ \vdots \\ -\frac{m}{\sqrt{mn}} \\ -\frac{m}{\sqrt{mn}} \end{pmatrix}$$

Dimana $s = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n}{\sqrt{mn}}$, jadi basis pada matrik diatas adalah $m(\lambda_2) = 1$.

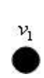
Untuk $\lambda_3 = -\sqrt{mn}$, juga menggunakan cara yang sama, sehingga diperoleh $m(\lambda_3) = 1$

Jadi, terbukti bahwa $Spec(K_{m,n}) = \begin{pmatrix} \sqrt{mn} & 0^{m+n-2} & -\sqrt{mn} \\ 1 & m+n-2 & 1 \end{pmatrix}$

D. Spectrum pada Graf Lintasan P_n

1. Spectrum P_1

P_1 :



Representasi matrik adjacent dari graf lintasan dengan *n* = 1 adalah:

$A(P_1) = 0$

Persamaan polynomial karakteristik diperoleh dengan:

$$\left(A\left(P_1\right)-\lambda I_n\right)=0-\lambda=-\lambda$$

$$det\left(A\left(P_1\right)-\lambda I\right)=\left|A\left(P_1\right)-\lambda I\right|=-\lambda$$

Nilai eigen diperoleh dengan:

$$\left|A\left(P_1\right)-\lambda I\right|=-\lambda=0$$

$$\lambda=0$$

Basis dari representasi matrik adjacent dari graf lintasan dengan n = 1 adalah:

Untuk $\lambda=0$, maka

$$\left(A\left(P_1\right)-\lambda I\right)x=0x=0$$

Misalkan $x=s$ dan $s\neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$x=s=s\left(1\right)$, basisnya adalah 1 dengan $\lambda=0$.

Jadi $Spec\left(P_1\right)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

2. Spectrum P_2

P_2 :

Representasi matrik adjacent dari graf lintasan dengan n = 2 adalah:

$$A\left(P_2\right)=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

Persamaan polynomial karakteristik diperoleh dengan:

$$\left(A\left(P_2\right)-\lambda I_n\right)=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\1 & -\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\0 & -\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda}\end{pmatrix}$$

$$det\left(A\left(P_2\right)-\lambda I\right)=\left|A\left(P_2\right)-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\0 & -\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda}\end{vmatrix}=\lambda^2-1$$

Nilai eigen diperoleh dengan:

$$\left|A(P_2)-\lambda I\right| = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

$\lambda_1 = 1$ atau $\lambda_2 = -1$

Basis dari representasi matrik adjacent dari graf lintasan dengan n = 2 adalah:

Untuk $\lambda_1 = 1$, maka

$$\left(A(P_2)-\lambda_1 I\right)x = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$-x_1 + x_2 = 0 \qquad ...(1)$$

$$x_1 - x_2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 \qquad ...(2)$$

Misalkan $x_1 = s$ dan $s \neq 0$, dengan mencari nilai dari x_1 dan x_2 pada persamaan (1) dan (2) maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, basisnya adalah 1 dengan $\lambda_1 = 1$.

Untuk $\lambda_2 = -1$, maka

$$\left(A(P_2)-\lambda_2 I\right)x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$x_1 + x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -x_2$$

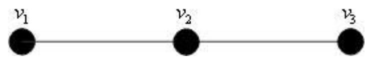
Misalkan $x_1 = s$ dan $s \neq 0$, dengan mencari nilai dari x_1 dan x_2 pada persamaan (1) dan (2) maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, basisnya adalah 1 dengan $\lambda_2 = -1$.

Jadi $Spec(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Spectrum P_3

P_3 :



Representasi matrik adjacent dari graf lintasan dengan n = 3 adalah:

$$A(P_3)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan polynomial karakteristik diperoleh dengan:

$$\left(A(P_3)-\lambda I_n\right)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\lambda\left(\lambda^2-2\right)}{\lambda^2-1} \end{pmatrix}$$

$$det\left(A(P_3)-\lambda I\right)=\left|A(P_3)-\lambda I\right|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\lambda\left(\lambda^2-2\right)}{\lambda^2-1} \end{vmatrix}=-\lambda\left(\lambda^2-2\right)$$

Nilai eigen diperoleh dengan:

$\left|A(P_3)-\lambda I\right|=-\lambda\left(\lambda^2-2\right)=0$ Atau dapat ditulis dengan $\left|A(P_3)-\lambda I\right|=\lambda\left(\lambda^2-2\right)=0$

$\lambda\left(\lambda-\sqrt{2}\right)\left(\lambda+\sqrt{2}\right)=0$

$\lambda_1=0,\ \lambda_2=\sqrt{2}$ atau $\lambda_3=-\sqrt{2}$

Basis dari representasi matrik adjacent dari graf lintasan dengan n = 3 adalah:

Untuk $\lambda_1=0,$ maka

$$\left(A\left(P_3\right)-\lambda_1 I\right)x=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$x_1=0$ ...(1)

$x_1+x_3=0\rightarrow x_1=-x_3$ ...(2)

$x_2=0$ ...(3)

Misalkan $x_3=s$ dan $s\neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\s\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, basisnya adalah 1 dengan $\lambda_1=0$.

Untuk $\lambda_2=\sqrt{2}$, maka

$$\left(A\left(P_3\right)-\lambda_2 I\right)x=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}&1&0\\1&-\sqrt{2}&1\\0&1&-\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$-\sqrt{2}x_1+x_2=0\rightarrow\sqrt{2}x_1=x_2$ ...(1)

$x_1-\sqrt{2}x_2+x_3=0$ ...(2)

$-\sqrt{2}x_3+x_2=0\rightarrow\sqrt{2}x_3=x_2$ ...(3)

Misalkan $x_2=s$ dan $s\neq 0$, dengan mencari nilai dari x_1 dan x_3 pada persamaan (1) dan (2) maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2}s\\s\\\frac{1}{2}\sqrt{2}s\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2}\\1\\\frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}$, basisnya adalah 1 dengan $\lambda_2=\sqrt{2}$.

Untuk $\lambda_3 = -\sqrt{2}$, maka

$$\left(A\left(P_3\right) - \lambda_3 I\right)x = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$\sqrt{2}x_1 + x_2 = 0 \rightarrow -\sqrt{2}x_1 = x_2 \quad ...(1)$$

$$x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3 = 0 \quad ...(2)$$

$$\sqrt{2}x_3 + x_2 = 0 \rightarrow -\sqrt{2}x_3 = x_2 \quad ...(3)$$

Misalkan $x_2 = s$ dan $s \neq 0$, dengan mencari nilai dari x_1 dan x_3 pada persamaan (1) dan (2) maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2}s \\ s \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$, basisnya adalah 1 dengan $\lambda_3 = -\sqrt{2}$.

Jadi $Spec\left(P_3\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Spectrum P_4

P_4 :

Representasi matrik adjacent dari graf lintasan dengan n = 4 adalah:

$$A(P_4)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

Persamaan polynomial karakteristik diperoleh dengan:

$$\left(A(P_4)-\lambda I_n\right)=\begin{pmatrix}-\lambda&1&0&0\\1&-\lambda&1&0\\0&1&-\lambda&1\\0&0&1&-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&1&0&0\\0&-\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda}&1&0\\0&0&-\dfrac{\lambda\left(\lambda^2-2\right)}{\lambda^2-1}&1\\0&0&0&-\dfrac{\lambda^4-3\lambda^2+1}{\lambda\left(\lambda^2-2\right)}\end{pmatrix}$$

$$\left|A(P_4)-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0&0\\0&-\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda}&1&0\\0&0&-\dfrac{\lambda\left(\lambda^2-2\right)}{\lambda^2-1}&1\\0&0&0&-\dfrac{\lambda^4-3\lambda^2+1}{\lambda\left(\lambda^2-2\right)}\end{vmatrix}=\lambda^4-3\lambda^2+1$$

Nilai eigen diperoleh dengan:

$$\left|A(P_4)-\lambda I\right|=\lambda^4-3\lambda^2+1=0$$

$$\left(\lambda^2+\lambda-1\right)\left(\lambda^2-\lambda-1\right)=0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\ \text{atau}\ \lambda_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Basis dari representasi matrik adjacent dari graf lintasan dengan n = 4 adalah:

Untuk $\lambda_1=\dfrac{\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2}$, maka:

$$\left(A\left(P_4\right)-\lambda_1 I\right)x=\begin{pmatrix} -\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$-\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2}x_1+x_2=0$$

$$x_1-\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2}x_2+x_3=0$$

$$x_2-\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2}x_3+x_4=0$$

$$x_3-\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2}x_4=0$$

Misalkan $x_3=s$ dan $s\neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \left(1-\frac{4}{\left(-1+\sqrt{5}\right)^2}\right)s \\ \left(\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2}-\frac{2}{\left(-1+\sqrt{5}\right)}\right)s \\ s \\ \frac{2}{\left(-1+\sqrt{5}\right)}s \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} \left(1-\frac{4}{\left(-1+\sqrt{5}\right)^2}\right) \\ \left(\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2}-\frac{2}{\left(-1+\sqrt{5}\right)}\right) \\ 1 \\ \frac{2}{\left(-1+\sqrt{5}\right)} \end{pmatrix}$$

basisnya adalah 1 dengan $\lambda_1=\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2}$.

Untuk $\lambda_2 = \frac{\left(-1-\sqrt{5}\right)}{2}$, maka:

$$\left(A\left(P_4\right)-\lambda_2 I\right)x = \begin{pmatrix} \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 + \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 + \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} x_3 + x_4 = 0$$

$$x_3 + \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} x_4 = 0$$

Misalkan $x_3 = s$ dan $s \neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-1+\frac{4}{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}\right)s \\ \left(-\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}+\frac{2}{\left(1+\sqrt{5}\right)}\right)s \\ s \\ -\frac{2}{\left(1+\sqrt{5}\right)}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} \left(-1+\frac{4}{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}\right) \\ \left(-\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}+\frac{2}{\left(1+\sqrt{5}\right)}\right) \\ 1 \\ -\frac{2}{\left(1+\sqrt{5}\right)} \end{pmatrix}$$

basisnya adalah 1 dengan $\lambda_1 = \frac{\left(-1-\sqrt{5}\right)}{2}$.

Untuk $\lambda_3 = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$, maka:

$$\left(A\left(P_4\right)-\lambda_3 I\right)x = \begin{pmatrix} -\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$-\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 - \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 - \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}x_3 + x_4 = 0$$

$$x_3 - \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}x_4 = 0$$

Misalkan $x_3 = s$ dan $s \neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 - \dfrac{4}{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}\right)s \\ \left(\dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} - \dfrac{2}{\left(1+\sqrt{5}\right)}\right)s \\ s \\ \dfrac{2}{\left(1+\sqrt{5}\right)}s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} \left(1 - \dfrac{4}{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}\right) \\ \left(\dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} - \dfrac{2}{\left(1+\sqrt{5}\right)}\right) \\ 1 \\ \dfrac{2}{\left(1+\sqrt{5}\right)} \end{pmatrix}$$

basisnya adalah 1 dengan $\lambda_3 = \dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$.

Untuk $\lambda_4 = \dfrac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2}$, maka:

$$\left(A\left(P_4\right) - \lambda_4 I\right)x = \begin{pmatrix} -\dfrac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\dfrac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$$-\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2}x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 - \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2}x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 - \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2}x_3 + x_4 = 0$$

$$x_3 - \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2} x_4 = 0$$

Misalkan $x_3 = s$ dan $s \neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

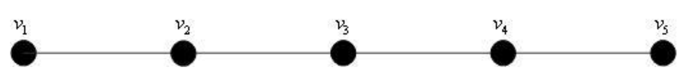
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{4}{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}\right) s \\ \left(\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2} - \frac{2}{\left(1-\sqrt{5}\right)}\right) s \\ s \\ \frac{2}{\left(1-\sqrt{5}\right)} s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{4}{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}\right) \\ \left(\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2} - \frac{2}{\left(1-\sqrt{5}\right)}\right) \\ 1 \\ \frac{2}{\left(1-\sqrt{5}\right)} \end{pmatrix}$$

basisnya adalah 1 dengan $\lambda_4 = \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2}$.

Jadi $Spec\left(P_4\right) = \begin{pmatrix} \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2} & \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2} & \frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2} & \frac{\left(-1-\sqrt{5}\right)}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. Spectrum P_5

P_5 :



Representasi matrik adjacent dari graf lintasan dengan *n* = 4 adalah:

$$A\left(P_5\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan polynomial karakteristik diperoleh dengan:

$$\left(A\left(P_5\right)-\lambda I_n\right)=\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{\lambda\left(\lambda^2-2\right)}{\lambda^2-1} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^4-3\lambda^2+1}{\lambda\left(\lambda^2-2\right)} & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda\left(\lambda^4-4\lambda^2+3\right)}{\lambda^4-3\lambda^2+1}\end{pmatrix}$$

$$\left|A\left(P_5\right)-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{\lambda\left(\lambda^2-2\right)}{\lambda^2-1} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^4-3\lambda^2+1}{\lambda\left(\lambda^2-2\right)} & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda\left(\lambda^4-4\lambda^2+3\right)}{\lambda^4-3\lambda^2+1}\end{vmatrix}$$

$$=-\lambda\left(\lambda^4-4\lambda^2+3\right)$$

Nilai eigen diperoleh dengan:

$\left|A\left(P_5\right)-\lambda I\right|=-\lambda\left(\lambda^4-4\lambda^2+3\right)=0$ atau dapat ditulis dengan

$\left|A\left(P_5\right)-\lambda I\right|=\lambda^5-4\lambda^3+3\lambda=0$

$(-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)\left(\lambda^2-3\right)=0$

$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-1,\ \lambda_4=\sqrt{3}$ atau $\lambda_5=-\sqrt{3}$

Basis dari representasi matrik adjacent dari graf lintasan dengan n = 5 adalah:

Untuk $\lambda_1 = 0,$ maka:

$$\left(A\left(P_5\right)-\lambda_1 I\right)x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$x_2 = 0$

$x_1 + x_3 = 0$

$x_2 + x_4 = 0$

$x_3 + x_5 = 0$

$x_4 = 0$

Misalkan $x_5 = s$ dan $s \neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ -s \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

basisnya adalah 1 dengan $\lambda_1 = 0$.

Untuk $\lambda_2 = 1,$ maka:

$$\left(A\left(P_5\right)-\lambda_2 I\right)x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$-x_1 + x_2 = 0$

$x_1 - x_2 + x_3 = 0$

$x_2 - x_3 + x_4 = 0$

$x_3 - x_4 + x_5 = 0$

$x_4 - x_5 = 0$

Misalkan $x_5 = s$ dan $s \neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ -s \\ 0 \\ s \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

basisnya adalah 1 dengan $\lambda_2 = 1$.

Untuk $\lambda_3 = -1,$ maka:

$$\left(A(P_5) - \lambda_3 I\right)x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$x_1 + x_2 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$x_3 + x_4 + x_5 = 0$

$x_4 + x_5 = 0$

Misalkan $x_5 = s$ dan $s \neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ 0 \\ -s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

basisnya adalah 1 dengan $\lambda_3 = -1$.

Untuk $\lambda_4 = \sqrt{3}$, maka:

$$\left(A(P_5) - \lambda_4 I\right)x = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$-\sqrt{3}x_1 + x_2 = 0$

$x_1 - \sqrt{3}x_2 + x_3 = 0$

$x_2 - \sqrt{3}x_3 + x_4 = 0$

$x_3 - \sqrt{3}x_4 + x_5 = 0$

$x_4 - \sqrt{3}x_5 = 0$

Misalkan $x_5 = s$ dan $s \neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ \left(2\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)s \\ 2s \\ \sqrt{3}s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ \left(2\sqrt{3} - \sqrt{3}\right) \\ 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

basisnya adalah 1 dengan $\lambda_4 = \sqrt{3}$.

Untuk $\lambda_5 = -\sqrt{3}$, maka:

$$\left(A(P_5) - \lambda_5 I\right)x = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

kemudian diperoleh sistem persamaan linier:

$\sqrt{3}x_1 + x_2 = 0$

$x_1 + \sqrt{3}x_2 + x_3 = 0$

$x_2 + \sqrt{3}x_3 + x_4 = 0$

$x_3 + \sqrt{3}x_4 + x_5 = 0$

$x_4 + \sqrt{3}x_5 = 0$

Misalkan $x_5 = s$ dan $s \neq 0$, maka diperoleh vektor eigennya adalah:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s \\ -\left(2\sqrt{3} + \sqrt{3}\right)s \\ 2s \\ -\sqrt{3}s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 3 \\ -\left(2\sqrt{3} + \sqrt{3}\right) \\ 2 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

basisnya adalah 1 dengan $\lambda_5 = -\sqrt{3}$.

Jadi $Spec(P_5) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Teorema

Misalkan $f_n(\lambda)$ adalah persamaan polynomial karakteristik graf P_n. Maka :

$$f_1(\lambda) = \lambda$$

$$f_2(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

$$f_n(\lambda) = -\lambda M_{1n} + M_{2n}, \;\; n \geq 3$$

Dimana M_{1n} dan M_{2n} merupakan kofaktor kolom satu dan dua dari matrik $\left(A(C_n) - \lambda I_n\right)$.

Bukti

Misalkan $A(P_n)$ adalah matrik adjacent dari P_n, maka

$$A(P_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(A(P_n) - \lambda I_n\right) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Persamaan polynomial karakteristik diperoleh dengan:

$$\left|A(P_n) - \lambda I_n\right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Dari hasil ekspansi kofaktor kolom pada matrik diatas, kita dapatkan:

$$\left|A(P_n) - \lambda I_n\right| = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 0$$

$$\left|A(P_n)-\lambda I_n\right| = -\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & -\lambda & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1(-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 0$$

$$\left|A(P_n)-\lambda I_n\right| = -\lambda M_{1n} + M_{2n},$$

dengan $M_{1n} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & -\lambda & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$, $M_{2n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$

Definisi

Polynomial *Chebyshev* jenis kedua adalah deret polynomial $U_n(x)$ sedemikian hingga

$$U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$$

untuk n = 0, 1, 2, … dimana $x = \cos(\theta)$, $\theta := [0,\pi]$ dan $x := [-1,1]$.

Teorema

Misal P_n adalah graf lintasan dengan $n \in N$, maka spectrum P_n adalah

$$Spec(P_n) = \begin{pmatrix} 2\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right) & \dots & 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right) & \dots & 2\cos\left(\dfrac{n\pi}{n+1}\right) \\ 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

untuk k = 1,2,3, …, n.

Bukti

Petunjuk: dari sifat-sifat trigonometri, dengan mudah kita tunjukkan:

$$\sin(0\theta) = 1$$
$$\sin(1\theta) = \sin\theta$$
$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\sin(3\theta) = \sin\theta\left(4\cos^2(\theta) - 1\right)$$
$$\sin(4\theta) = \sin\theta\left(8\cos^3(\theta) - 4\cos(\theta)\right)$$

Ekspansi dari polinom-polinom *Chebyshev* jenis kedua, didapatkan:

$$n = 0 \rightarrow U_0\left(\cos(\theta)\right) = \frac{\sin\left((0+1)\theta\right)}{\sin\theta} = 1$$

$$U_0(x) = 1$$

$$n = 1 \rightarrow U_1\left(\cos(\theta)\right) = \frac{\sin\left((1+1)\theta\right)}{\sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$n = 2 \rightarrow U_2\left(\cos(\theta)\right) = \frac{\sin\left((2+1)\theta\right)}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta\left(4\cos^2(\theta) - 1\right)}{\sin\theta} = 4\cos^2(\theta) - 1$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$

$$n = 3 \rightarrow U_3\left(\cos(\theta)\right) = \frac{\sin\left((3+1)\theta\right)}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta\left(8\cos^3(\theta) - 4\cos(\theta)\right)}{\sin\theta} = 8\cos^3(\theta) - 4\cos(\theta)$$

$U_3(x) = 8x^3 - 4x$ dan seterusnya.

Dari keterangan diatas, $U_n\left(\cos(\theta)\right) = \dfrac{\sin\left((n+1)\theta\right)}{\sin\theta} = 0$ jika memenuhi syarat $x = \cos(\theta)$ dengan $\theta = \dfrac{k\pi}{n+1}$.

Pilih $x = \dfrac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda = 2x = 2\cos(\theta) = 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$, sehingga kita dapatkan:

$$U_1(x)=U_1\left(\frac{\lambda}{2}\right)=2\left(\frac{\lambda}{2}\right)=\lambda$$

$$U_2(x)=U_2\left(\frac{\lambda}{2}\right)=4\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2-1=\lambda^2-1$$

$$U_3(x)=U_3\left(\frac{\lambda}{2}\right)=8\left(\frac{\lambda}{2}\right)^3-4\left(\frac{\lambda}{2}\right)=\lambda^3-2\lambda$$

Dan seterusnya, sehingga persamaan polynomial karakteristik pada graf P_n adalah polynomial *chebyshev* dengan $x=\frac{\lambda}{2}$ atau dapat ditulis:

$$U_n(x)=U_n\left(\frac{\lambda}{2}\right)=U_n\left(\frac{\cos(\theta)}{2}\right)$$

Dengan nilai eigennya:

$\lambda=2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ dimana k = 1,2,3, …, *n*.

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuain dengan λ.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Didapatkan sistem persamaan linier:

$$\lambda x_1+x_2=0\rightarrow x_2=-\lambda x_1$$

$$x_1+\lambda x_2+x_3=0\rightarrow x_3=-x_1-\lambda x_2=\left(\lambda^2-1\right)x_1$$

$$x_2+\lambda x_3+x_4=0\rightarrow x_4=-x_2-\lambda\left(-x_1-\lambda x_2\right)=-\left(\lambda^3-2\lambda\right)x_1$$

$$x_3 + \lambda x_4 + x_5 = 0 \rightarrow x_5 = -(x_3 + \lambda x_4) = (\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1)x_1$$

...

$$x_{n-2} + \lambda x_{n-1} + x_n = 0 \rightarrow x_n = -(x_{n-2} + \lambda x_{n-1})$$

Karena setiap elemen dari vektor taknol x dapat dinyatakan dalam λx_1, maka basis dari matrik tersebut adalah satu.

Jadi terbukti bahwa spectrum pada graf lintasan P_n dengan $n \in N$ adalah:

$$Spec(P_n) = \begin{pmatrix} 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) & \dots & 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) & \dots & 2\cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right) \\ 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

dimana $k = 1,2,3, \dots, n$.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, maka beberapa kesimpulan yang dapat diambil adalah sebagai berikut.

1. Misal K_n graf komplit order n, maka *spectrum* graf komplit (K_n) adalah

$$\text{Spec }(K_n) = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 1 & (n-1) \end{bmatrix}$$

2. Misal S_n adalah graf star dengan $n \in N - \{1\}$, maka spectrum S_n adalah

$$Spec(S_n) = \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0^{n-1} & -\sqrt{n} \\ 1 & n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Misal $K_{m,n}$ adalah graf komplit bipartisi dengan m dan n bilangan asli lebih dari 1, maka spectrum $K_{m,n}$ adalah

$$Spec(K_{m,n}) = \begin{pmatrix} \sqrt{mn} & 0^{m+n-2} & -\sqrt{mn} \\ 1 & m+n-2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Misal P_n adalah graf lintasan dengan $n \in N$, maka spectrum P_n adalah

$$Spec(P_n) = \begin{pmatrix} 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) & \dots & 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) & \dots & 2\cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right) \\ 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

untuk $k = 1,2,3, \dots, n$.

B. Saran

Berdasarkan penelitian, disarankan kepada peneliti yang lain untuk mengkaji spectrum pada graf-graf yang lain.